

**Mario Martinelli**

# **Comportamento dinamico di fondazioni su pali in sabbia**

*Tesi di Dottorato*

**Dottorato di Ricerca in Ingegneria Geotecnica  
XXIV Ciclo – Maggio 2012**

Relatore:

Prof. Alberto Burghignoli

Correlatori:

Prof. Claudio Tamagnini

Prof. Luigi Callisto



---

# Indice

## Introduzione

Introduzione.....	i
-------------------	---

## Capitolo 1

### STATO DELL'ARTE

1.1 Introduzione.....	2
1.2 L'interazione cinematica.....	6
1.2.1 Valutazione dei momenti flettenti.....	8
1.2.2 Modifica dei parametri del moto.....	28
1.2.3 Aspetti che influenzano l'interazione palo-terreno.....	34
1.2.3.1 Effetto della profondità del contatto stratigrafico rispetto alla superficie.....	35
1.2.3.2 Effetto del contenuto in frequenza dell'input sismico.....	37
1.2.3.3 Effetto dello smorzamento del materiale.....	38
1.2.3.4 Effetto della lunghezza del palo nello strato rigido.....	38
1.2.3.5 Effetto della non linearità geometrica e del materiale.....	39

## Capitolo 2

### MODELLI COSTITUTIVI AVANZATI

2.1 Introduzione.....	42
2.2 Il modello PB per le sabbie.....	43
2.2.1 Struttura del modello.....	44
2.2.1.1 Concetti di base ed equazioni – caso Triassiale.....	44
2.2.1.2 Superfici del modello nello spazio multiassiale.....	48
2.2.1.3 Calcolo delle deformazioni (para)elastiche.....	50
2.2.1.4 Deformazioni plastiche e incrudimento cinematico.....	53
2.2.1.5 Effetto dell'evoluzione della struttura durante i cicli.....	55
2.2.2 Parametri del modello e loro calibrazione.....	57
2.3 Il modello DM per le sabbie.....	59
2.3.1 Struttura del modello.....	60
2.3.1.1 Stato critico.....	60
2.3.1.2 Elasticità.....	60
2.3.1.3 Funzione di plasticizzazione.....	60
2.3.1.4 Deformazioni plastiche e incrudimento cinematico.....	62
2.3.1.5 Effetto dell'evoluzione della tessitura durante i cicli.....	64
2.3.2 Parametri del modello .....	65

---

---

## Capitolo 3

### IMPLEMENTAZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI COSTITUTIVE IN CODICI AGLI ELEMENTI FINITI

3.1 Introduzione.....	68
3.2 L'algoritmo di Bardet & Choucair (1991).....	71
3.3 Algoritmo RKF23 .....	73
3.3.1 La procedura di integrazione.....	76
3.3.2 La linearizzazione consistente.....	77
3.4 Valutazione della risposta dei modelli a livello dell'elemento di volume.....	79
3.4.1 Modello PB(2002).....	79
3.4.1.1 Prove monotone.....	79
3.4.1.2 Prove cicliche.....	80
3.4.2 Modello DM(2004).....	81
3.4.2.1 Prove monotone.....	81
3.4.2.2 Prove cicliche.....	82
3.5 Accuratezza ed efficienza dell'algoritmo RKF23.....	84
3.5.1 Mappe di isoerrore e di isoefficienza.....	85

## Capitolo 4

### L'ANALISI DINAMICA

4.1 Equazioni che governano i processi accoppiati in campo dinamico.....	94
4.1.1 Introduzione.....	94
4.1.2 La teoria delle miscele.....	96
4.1.3 Teorema del trasporto.....	97
4.1.4 Conservazione della massa per i singoli costituenti.....	97
4.1.5 Conservazione della massa della miscela.....	99
4.1.6 Conservazione della quantità di moto dei singoli costituenti.....	100
4.1.7 Conservazione della quantità di moto della miscela.....	102
4.1.8 Equazioni costitutive.....	103
4.1.8.1 Equazioni costitutive per lo scheletro solido.....	103
4.1.8.2 Equazioni costitutive per la fase liquida.....	104
4.1.8.3 Legge di Darcy generale.....	104
4.1.9 Formulazione generale: Riepilogo delle equazioni ( $S_r=1$ ).....	106
4.1.9.1 Processi estremamente lenti (ESP).....	106
4.1.9.2 Processi lenti (SSP).....	107
4.1.9.3 Processi di media velocità (MSP).....	108
4.1.9.4 Processi rapidi (HSP).....	108
4.1.9.5 Processi estremamente rapidi: condizioni non drenate (UP).....	109
4.2 Campo di applicabilità dei diversi approcci.....	111

---

---

## Capitolo 5

### RISOLUZIONE NUMERICA DELL'EQUAZIONE DEL MOTO

5.1.Introduzione.....	118
5.2.Metodi di soluzione delle equazioni dinamiche del moto.....	119
5.2.1.Il metodo di Eulero all'indietro (BWE).....	119
5.2.2.Il metodo di Newmark.....	121
5.3.La stabilità del metodo di integrazione.....	122
5.3.1.La stabilità del metodo di Eulero all'indietro (BWE).....	123
5.3.2.La stabilità del metodo di Newmark.....	124
5.4.Comportamento ad alte frequenze.....	125
5.5.L'accuratezza del metodo di integrazione.....	126
5.5.1.Lo smorzamento nel metodo BWE.....	126
5.5.2.Lo smorzamento del metodo di Newmark.....	132

## Capitolo 6

### ANALISI PRELIMINARI DI CALIBRAZIONE

6.1.Introduzione.....	134
6.2.Dimensione degli elementi finiti.....	135
6.3.Le condizioni al contorno laterale.....	136
6.3.1.Risposta sismica locale: mezzo vico-elastico lineare.....	140
6.3.2.Risposta sismica locale: modello DM.....	144
6.4.Il palo come elemento strutturale.....	147

## Capitolo 7

### ANALISI DELL'INTERAZIONE TERRENO- STRUTTURA: L'INTERAZIONE

#### CINEMATICA

7.1 Introduzione.....	152
7.2 Definizione del problema.....	153
7.3 Analisi della risposta sismica locale.....	158
7.3.1 Risposta ciclica del modello DM.....	158
7.3.2 Accelerogramma di Tolmezzo.....	160
7.3.2.1 Sovrappressioni interstiziali.....	160
7.3.2.2 Risposta sismica in superficie.....	165
7.3.2.3 Cedimenti in superficie.....	171
7.3.2.4 Deformazioni di taglio massime.....	173
7.3.3 Accelerogramma di Sturno.....	175
7.3.3.1 Sovrappressioni interstiziali.....	175
7.3.3.2 Cedimenti in superficie.....	179
7.3.3.3 Deformazioni massime di taglio.....	181
7.4 Analisi di interazione cinematica palo - terreno.....	183
7.4.1 Momenti flettenti massimi.....	185
7.4.1.1 Effetto dell'incremento delle pressioni interstiziali.....	185

---

---

7.4.1.2 Effetto della lunghezza del palo.....	191
7.4.1.3 Effetto del diametro del palo.....	194
7.4.1.3.1 Incrementi di pressione interstiziale.....	194
7.4.1.3.2 Sollecitazioni al contatto stratigrafico.....	197
7.4.1.3.3 Sollecitazioni in testa al palo.....	198
7.4.2 Modifica del moto in testa al palo.....	200
7.5 Accuratezza delle analisi al finito.....	203
7.5.1 Influenza della dimensione degli elementi.....	203
7.5.2 Confronto tra analisi al finito: FEI e TOCHNOG.....	209
7.5.2.1 Risposta sismica locale.....	209
7.5.2.2 Interazione terreno-struttura.....	211

## Capitolo 8

### CONFRONTO CON I RISULTATI DEI METODI SEMPLIFICATI

8.1 Introduzione.....	214
8.2 Analisi della risposta sismica locale in EERA.....	215
8.2.1 Il modello viscoelastico lineare equivalente.....	216
8.2.2 Modello viscoelastico lineare.....	222
8.2.3 Risultati delle analisi.....	222
8.3 I metodi semplificati per le sollecitazioni flettenti nei pali.....	229
8.3.1 Confronto a parità di dati di ingresso.....	230
8.3.1.1 Sollecitazioni al contatto stratigrafico.....	231
8.3.1.2 Sollecitazioni in testa al palo.....	232
8.3.1.3 Alcuni aspetti sui dati di ingresso per le sollecitazioni al contatto stratigrafico.....	237
8.3.2 Confronto variando i dati di ingresso.....	241

## Capitolo 9

### ANALISI DI INTERAZIONE COMPLETA

9.1 Introduzione.....	252
9.2 Definizione del problema.....	253
9.3 Analisi Preliminare.....	256
9.4 Risultati delle analisi.....	260
9.4.1 Comportamento della struttura.....	262
9.4.2 Modifica del moto sismico.....	263
9.4.3 Cedimenti dei pali.....	265
9.4.4 Forze assiali nei pali e pressione al contatto tra platea e terreno.....	267
9.4.5 Incremento delle pressioni interstiziali.....	270
9.4.6 Involuppo dei massimi momenti flettenti.....	274

---

---

## Conclusioni

Conclusioni.....	279
------------------	-----

## Appendice

### IMPLEMENTAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI DELLE EQUAZIONI DINAMICHE

A.1.Introduzione.....	288
A.2.Formulazione dei processi HSP.....	288
A.2.1.Equazioni generali.....	288
A.2.2.Cambiamento di variabile.....	290
A.2.3.La formulazione agli elementi finiti.....	292
A.2.4.Le equazioni in forma matriciale.....	296
A.3.Formulazione dei processi MSP.....	297
A.3.1.Equazioni generali.....	297
A.3.2.La formulazione agli elementi finiti.....	300
A.3.3.Le equazioni in forma matriciale.....	302
A.4.Formulazione dei processi UP.....	304
A.4.1.Equazioni generali.....	304
A.4.2.La formulazione agli elementi finiti.....	305
A.4.3.Le equazioni in forma matriciale.....	306

## Bibliografia

Bibliografia.....	309
-------------------	-----

---

# INTRODUZIONE

## **INQUADRAMENTO GENERALE DELLA RICERCA**

Le opere di ingegneria civile presentano elementi strutturali a diretto contatto con il terreno. Quando le azioni esterne, come un terremoto, agiscono sull'intera opera, gli spostamenti della struttura e del terreno non sono indipendenti tra loro ma sono fortemente interagenti. Il processo nel quale la risposta del terreno influenza il moto della struttura e viceversa è chiamato interazione terreno-struttura.

I danni causati dai recenti terremoti hanno sottolineato che il comportamento dinamico della struttura è fortemente influenzato non solo dalla risposta della sovrastruttura, considerata come vincolata alla base, ma anche dalla risposta della fondazione e del sottosuolo. Inoltre, la stima accurata delle azioni che interessano l'opera di fondazione da un lato garantisce una corretta progettazione dell'intera struttura e, dall'altro permette di valutare il possibile danneggiamento di opere di fondazione già esistenti.

Oltre alla valutazione delle sollecitazioni sull'opera di fondazione, risulta essenziale quantificare il potenziale accumulo di spostamenti permanenti dell'intera opera a seguito di eventi sismici severi. Al fine di poter valutare il superamento di un eventuale stato limite è perciò necessario tenere conto della natura irreversibile delle deformazioni indotte nel terreno. Se a ciò si aggiunge la complessa interazione con l'acqua, risulta oltremodo necessario l'impiego di simulazioni numeriche con modelli costitutivi avanzati, formulati in termini di tensioni efficaci, che possano tenere conto anche della modifica dello stato tensionale per effetto delle sovrappressioni interstiziali indotte durante il sisma.

Sebbene la modellazione numerica avanzata costituisca uno strumento molto vantaggioso per lo studio dei fenomeni di interazione dinamica terreno-struttura, risulta di fondamentale importanza l'impiego di un modello costitutivo adeguato a descrivere il comportamento del terreno sottoposto a sollecitazioni cicliche e dinamiche. Per questa ragione, la scelta del modello costitutivo deve principalmente basarsi sui risultati di prove sperimentali a livello dell'elemento di volume e ad una scala più grande che consenta di tenere in conto anche l'interazione terreno-struttura.

A causa dell'insufficienza di dati relativi al monitoraggio di opere reali, uno strumento molto utile alla comprensione del comportamento sismico di opere è costituito dai modelli fisici in scala ridotta, la centrifuga o la tavola vibrante. Queste prove consentono di identificare i principali meccanismi che intervengono nell'interazione terreno-struttura e, al tempo stesso, forniscono una base di dati sperimentali sulla quale tarare e validare modelli numerici per analisi avanzate in situazioni ideali in cui le proprietà del terreno, le condizioni al contorno e le sollecitazioni dinamiche sono ben definite.

Il presente lavoro di tesi è costituito da uno studio a carattere esclusivamente numerico ma i modelli costitutivi implementati, utilizzati nella letteratura scientifica anche per problemi di interazione terreno-struttura, hanno fornito buoni accordi con le evidenze sperimentali. Proprio questo aspetto conferisce ai risultati di questa ricerca una attendibilità ed una capacità illustrativa del fenomeno di valore certamente generale. Questi risultati, quindi, possono essere utilizzati anche come soluzione di riferimento nel confronto con quelli che derivano da approcci semplificati.

## **OGGETTO DELLA RICERCA E STRUTTURA DELLA TESI**

Il presente lavoro ha avuto come oggetto il comportamento di fondazioni profonde sotto l'azione sismica, con particolare attenzione alle fondazioni miste costituite da platea su pali. Lo studio, a carattere esclusivamente numerico, ha preso in considerazione terreni a grana grossa saturi tenendo conto anche dell'accumulo e della dissipazione delle pressioni interstiziali generate durante l'evento sismico.

L'esecuzione di analisi numeriche avanzate ha richiesto l'impiego di equazioni costitutive per il terreno capaci di descrivere gli aspetti essenziali del suo comportamento meccanico in condizioni di carico

ciclico e dinamico.

Le evidenze sperimentali mostrano che le caratteristiche della risposta ciclica/dinamica dei terreni presentano i seguenti aspetti peculiari: l'irreversibilità e la non linearità incrementale, il comportamento isteretico e la dipendenza dalla storia tensionale. I modelli elastoplastici classici per i terreni, formulati nell'ambito della teoria della plasticità perfetta o incrudente, sono in grado di riprodurre con sufficiente accuratezza i fenomeni di non linearità e irreversibilità in condizioni di carico monotono. Al contrario, sono assolutamente insufficienti nel descrivere l'accumulo di deformazioni irreversibili causate da sollecitazioni cicliche ed hanno una modesta capacità di tenere in conto degli effetti della storia tensionale.

Nell'ultimo ventennio sono stati proposti numerosi modelli che consentono di simulare correttamente la risposta del terreno in condizioni di carico tipiche degli eventi sismici. *Tamagnini (2009)* ha evidenziato i requisiti fondamentali di un modello di tal genere per essere impiegato con efficacia nelle analisi numeriche:

- a) relativa semplicità della struttura matematica delle equazioni costitutive, essenziale al fine della valutazione qualitativa della risposta del modello e del ruolo giocato dalle diverse costanti che caratterizzano le proprietà del materiale, ma anche funzionale alla successiva implementazione numerica;
- b) possibilità di pervenire alla determinazione delle costanti del materiale mediante prove di laboratorio convenzionali, con procedure di determinazione diretta, per quanto possibile;
- c) capacità di riprodurre il comportamento di terreni sciolti o addensati mediante un unico insieme di costanti del materiale (i.e., tali da includere l'indice dei vuoti nell'insieme delle variabili di stato);
- d) possibilità di riprodurre condizioni di stato critico per deformazioni distorsionali estreme;
- e) capacità di descrivere per quanto possibile correttamente, sia dal punto di vista qualitativo sia quantitativo, il decadimento della rigidezza a taglio e l'aumento dell'energia dissipata per isteresi al crescere del livello di deformazione distorsionale;
- f) capacità di riprodurre correttamente, sia dal punto di vista qualitativo sia quantitativo, i fenomeni di liquefazione statica e dinamica dovuti allo sviluppo di sovrappressioni interstiziali positive in processi di deformazione non drenati o parzialmente drenati;



g) capacità di descrivere, almeno qualitativamente, gli effetti della anisotropia indotta e dell'evoluzione della tessitura (*fabric*) nel corso del processo di deformazione ciclica.

Alla luce di tali considerazioni, nel presente lavoro di tesi sono stati scelti due modelli costitutivi ad incrudimento cinematico, che hanno origine dalla versione di *Manzari & Dafalias (1997)*: *Papadimitriou & Bouckovalas (2002)* (PB in seguito) e *Dafalias & Manzari (2004)* (DM in seguito). Il primo è stato utilizzato esclusivamente per riprodurre a livello di elemento di volume il comportamento meccanico dei terreni a grana grossa, sviluppando in Matlab un driver costitutivo basato sull'algoritmo di *Bardet & Chouhair (1991)*, che è stato utilizzato anche dalla Dottoranda Chiara Miriano per svolgere alcuni tests di verifica della sua implementazione in Fortran dello stesso modello.

Le analisi numeriche sono state svolte impiegando il codice agli elementi finiti TOCHNOG Professional (v.5.4), nel quale è stato implementato il modello costitutivo DM (mediante una routine UMAT) con il fondamentale contributo di Chiara Miriano e del Prof. Claudio Tamagnini.

L'integrazione di equazioni costitutive a livello locale rappresenta il problema centrale della plasticità computazionale (*Hughes, 1984*) e la precisione con cui esse sono risolte ha un effetto diretto sulla accuratezza della analisi. Tuttavia, non è possibile stabilire a priori quale sia la strategia "migliore" da adottare poiché essa dipende sia dalla accuratezza ed efficienza che si intende raggiungere sia dalla complessità del modello costitutivo. In questo lavoro di tesi è stato scelto un particolare algoritmo esplicito a passo variabile e a controllo dell'errore: l'algoritmo di Runge-Kutta-Fehlberg (RKF23) del terzo ordine.

A causa della sua considerevole complessità e del carattere totalmente automatico, l'implementazione di questo algoritmo è stata sottoposta ad una procedura di verifica. Sono state infatti messe a confronto le soluzioni numeriche fornite dalla routine UMAT con quelle ottenute dal driver costitutivo originariamente scritto da Mahdi Taiebat, anch'esso revisionato e corretto, basato sull'algoritmo di *Bardet & Chouhair (1991)* e con quelle ottenute dalla versione dello stesso modello disponibile nel codice FEI (codice di calcolo FEM sviluppato presso l'Università di Davis in California). Inoltre, la correttezza dell'implementazione è stata evidenziata anche dal perfetto accordo tra i risultati numerici di problemi al finito (analisi di risposta sismica e analisi di interazione terreno-struttura, in condizioni drenate e di consolidazione) ottenuti utilizzando questa implementazione nel codice di calcolo TOCHNOG e quella disponibile in FEI. Infine il lavoro sull'algoritmo di punto di Gauss è stato completato da uno studio numerico finalizzato alla valutazione dell'accuratezza e dell'efficienza della

implementazione prodotta.

Il modello di materiale implementato è stato poi impiegato per lo studio di due tipi di problemi al finito. Inizialmente è stato condotto uno studio parametrico per valutare la risposta sismica di un palo di fondazione immerso in un terreno composto da due strati, ciascuno di spessore pari a 15 m. L'indice dei vuoti nello strato superiore è stato ricavato dal parametro  $\psi$  (Been & Jefferies, 1985), assunto costante nello strato e sempre negativo, in modo tale da far raggiungere alla densità relativa i valori compresi tra il 55% e l'85%. Lo strato inferiore invece è più denso, più rigido e più resistente di quello superiore. In tutte le analisi, in corrispondenza dell'interfaccia lo strato superiore ha una rigidezza iniziale circa tre volte più piccola di quella dello strato inferiore e la velocità di propagazione delle onde di taglio ( $v_{s,30}$ ) è minore di 180 m/s, perciò il sottosuolo appartiene alla classe di terreno D (DM 14.1.2008). Il palo, studiato sia nell'ipotesi di rotazione libera in testa sia di rotazione impedita, ha un diametro variabile da 0,6m a 1,5m e una lunghezza tra 16 e 20 m. Sono stati eseguiti tre diversi tipi di analisi: analisi drenate, analisi non drenate e analisi di consolidazione. In quest'ultimo caso, sono stati adottati due diversi valori del coefficiente di permeabilità ( $10^{-6}$  e  $10^{-4}$  m/s) per lo strato superiore e un valore unico ( $10^{-4}$  m/s) per lo strato inferiore.

In questo studio parametrico è stata valutata l'influenza di diversi parametri quali l'indice dei vuoti, la rigidezza flessionale del palo, la permeabilità dei terreni, la lunghezza della parte di palo immersa nello strato rigido e il vincolo alla rotazione in testa al palo. Inoltre, data l'accuratezza del legame costitutivo e della modellazione al finito, i risultati hanno costituito il riferimento nel confronto con quelli che derivano da diversi approcci semplificati.

Infine è stato messo a punto lo studio della risposta dinamica completa di una pila da ponte avente fondazione mista costituita da una platea su pali. La geometria della pila, della fondazione e dell'impalcato sono stati scelti facendo riferimento ad una pila da ponte ferroviario. Lo studio ha messo in luce alcuni aspetti che riguardano l'interazione durante l'evento sismico, quali i cedimenti della fondazione, le percentuali di forza verticale trasmessa direttamente al terreno dalla platea e dai pali e l'azione di filtraggio del segnale propagato alla base della pila esercitata dal sistema fondazione-terreno. Data l'accuratezza del legame costitutivo e della modellazione al finito, anche questi risultati possono costituire un utile riferimento per confronti con metodi semplificati.

## Struttura della tesi

La Tesi è articolata in nove capitoli principali oltre ad un capitolo di conclusioni.

Il primo capitolo è dedicato alla rivisitazione della letteratura sul tema dell'interazione dinamica terreno-struttura con particolare riferimento ai problemi delle fondazioni profonde e alla interazione cinematica. Una sezione del capitolo è dedicata alla presentazione dei metodi semplificati per la stima delle sollecitazioni indotte lungo i pali per effetto della sola interazione cinematica.

Il secondo capitolo è dedicato alla descrizione delle equazioni dei legami costitutivi ad incrudimento cinematico di *Papadimitrou & Boukoulas (2002)* e *Dafalias & Manzari (2004)*.

Il terzo capitolo descrive gli algoritmi di implementazione utilizzati per i due modelli: l'algoritmo RKF23 e quello di *Bardet & Choucair (1991)*. Vengono descritte, inoltre, le prestazioni dell'algoritmo RKF23 e i test di accuratezza ed efficienza svolti al fine di verificare la correttezza dell'implementazione.

Il quarto capitolo descrive le equazioni che regolano i processi in campo dinamico, i diversi approcci che possono essere seguiti e i loro campi di applicabilità.

Il quinto capitolo descrive le tecniche di soluzione numerica delle equazioni del moto utilizzate nei due codici agli elementi finiti: TOCHNOG e FEI.

Il sesto capitolo descrive i criteri per la determinazione della dimensione appropriata della *mesh* nei problemi dinamici e mostra alcune analisi svolte per stabilire le appropriate condizioni al contorno sulle superfici laterali del modello.

Il settimo capitolo descrive l'analisi parametrica condotta per studiare il fenomeno dell'interazione cinematica palo-terreno. Sono illustrati i risultati ottenuti da analisi drenate, non drenate e di consolidazione di un palo isolato, ottenute con il programma di calcolo TOCHNOG. Viene enfatizzato, inoltre, il ruolo delle pressioni interstiziali nei riguardi dell'interazione terreno-struttura. Infine è valutata sia la dipendenza dei risultati dalla dimensione della *mesh* sia l'accuratezza delle analisi al finito.

Nel capitolo ottavo vengono illustrati i risultati ottenuti con metodi semplificati relativi alle analisi di interazione cinematica illustrati nel capitolo precedente. Vengono, infine, enfatizzate le scarse capacità previsionali di questi metodi quando il fenomeno è fortemente legato alle sovrappressioni interstiziali.

Infine, il nono capitolo è dedicato alla descrizione dell'interazione completa tra la struttura, la fondazione e il terreno. Viene illustrato lo studio di una pila da ponte su platea con pali per il quale viene evidenziato il contributo dell'interazione cinematica.

# Capitolo 1

## **STATO DELL'ARTE**

## 1.1 INTRODUZIONE

La risposta dinamica di una struttura fondata su pali è il risultato di una complessa interazione tra terreno-fondazione-struttura. In generale il problema è reso ancora più complesso dai fenomeni non lineari che intervengono soprattutto nel terreno, specialmente vicino ai pali. Inoltre il sistema di fondazione si deforma in maniera diversa rispetto alle condizioni di *free-field* a causa proprio dell'interazione fondazione-terreno. Per determinare correttamente la risposta sismica dell'intero complesso terreno-fondazione-struttura sarebbe necessario fare riferimento a modelli dinamici completi che permettano di rappresentare correttamente le geometrie del problema, simulare adeguatamente il comportamento meccanico del terreno e degli elementi strutturali tenendo conto anche delle sovrappressioni interstiziali sviluppate durante il terremoto.

Nella progettazione ordinaria, allo stato attuale, questo approccio risulta particolarmente oneroso e molto spesso impraticabile, a meno di strutture particolarmente importanti. In molti casi, addirittura, la risposta sismica della struttura è calcolata trascurando gli effetti dell'interazione terreno-struttura e quindi imponendo vincoli fissi alla base delle strutture. Alla base di questo approccio c'è la convinzione che la cedevolezza della fondazione abbia un ruolo benefico riducendo le forze di inerzia sulla struttura. Infatti, la cedevolezza della fondazione in presenza di uno spettro di progetto standard, con ramo decrescente dopo un tratto di accelerazione spettrale costante, induce due effetti (Figura 1.1.1):

- aumenta il periodo proprio della struttura (da  $T$  a  $\tilde{T}$  ),
- aumenta lo smorzamento complessivo del sistema terreno-fondazione-struttura (da  $\beta$  a  $\tilde{\beta}$  ) poiché parte dell'energia viene dissipata nel terreno per radiazione ed isteresi.

A seguito di questi due contributi, l'ordinata dello spettro elastico di risposta si riduce.

In realtà *Gazetas e Mylonakis (1998, 2000)* hanno mostrato che questo approccio non sia sempre a vantaggio di sicurezza (Figura 1.1.2) ed hanno proposto un metodo che consente di tenere in conto l'interazione tra il terreno, la fondazione e la struttura. Questo metodo si chiama “metodo delle sottostrutture” (*Gazetas e Mylonakis, 1998*).

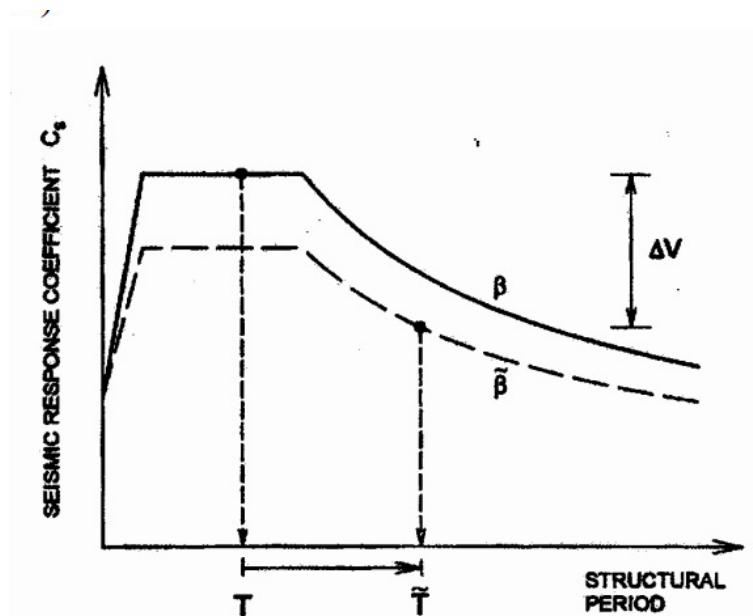


Figura 1.1.1: Riduzione dello spettro di risposta per l'effetto dell'interazione terreno-struttura.  
(da Gazetas & Mylonakis, 2000)

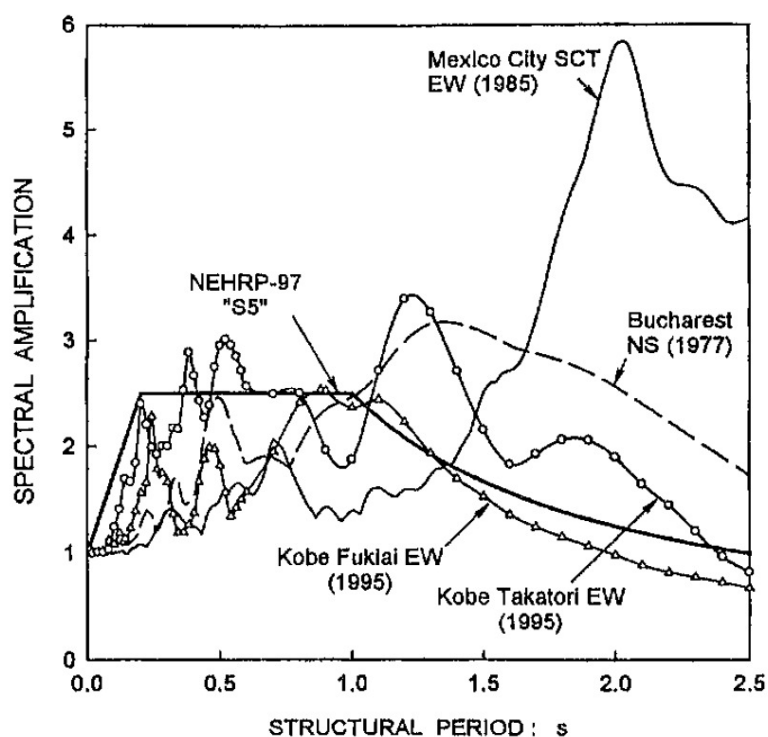


Figura 1.1.2: Confronto tra un tipico spettro elastico di progetto da normativa e quelli ottenuti dalla registrazione di eventi catastrofici.  
(da Gazetas & Mylonakis, 2000)

Il beneficio introdotto dal metodo delle sottostrutture (Figura 1.1.3) è quello di aver scomposto il problema dell'interazione a tre componenti (terreno, fondazione e struttura), in due fasi in cui l'interazione è solamente a due componenti ciascuna (terreno-fondazione, fondazione-struttura).

In una prima fase si considera la massa della struttura in elevazione pari a zero e si analizza l'interazione fondazione-terreno per valutare le sollecitazioni negli elementi strutturali e la variazione del moto sismico rispetto al *free-field* (interazione cinematica).

Nella seconda fase si considera la sovrastruttura che poggia su un sistema fondazione-terreno privo di massa. Tale sistema contribuisce alla risposta globale attraverso la sua impedenza dinamica. Allo schema così descritto si applica il moto ottenuto dalla fase precedente e si ricavano le sollecitazioni agenti nella struttura in elevazione e quelle trasmesse alla fondazione (interazione inerziale).

La risposta complessiva dell'intero sistema terreno-fondazione-struttura è data dalla somma delle storie temporali che derivano dai due contributi, sotto l'ipotesi di validità del principio di sovrapposizione degli effetti. Allo stesso modo le caratteristiche della sollecitazione nei pali di fondazione possono essere ricavate dalla somma di quelle che derivano dal primo contributo con quelle del secondo.

In realtà l'ipotesi linearità e quindi di sovrapposizione degli effetti è valida solamente se sono rispettate contemporaneamente le seguenti condizioni:

- il comportamento meccanico dei materiali è elastico lineare e quindi le deformazioni che essi subiscono crescono in proporzione lineare all'aumentare dei carichi esterni;
- le deformazioni sono piccole, ovvero tali da consentire di scrivere le equazioni di equilibrio nella configurazione indeformata;
- le condizioni di vincolo non dipendono dall'entità dei carichi agenti.

Quasi mai una struttura soggetta a carichi esterni mostra un comportamento perfettamente elastico-lineare. Ciò è dovuto principalmente al fatto che i legami costitutivi dei materiali reali non rispettano affatto il legame lineare precedentemente citato. Per questa ragione, a rigore, si dovrebbe far ricorso sempre ad un'analisi non lineare di interazione completa costituita da tutti e tre i componenti.

Nella letteratura scientifica, tuttavia, il problema complesso dell'interazione terreno-struttura-fondazione, soprattutto quando quest'ultima è costituita da una platea su pali, è stato studiato comunque tenendo conto separatamente dei due contributi: cinematico e inerziale. Per questa ragione, sono stati messi a punto metodi, più o meno rigorosi, che consentono di determinare la risposta



cinematica e inerziale del sistema. Alcuni di essi, limitatamente all'interazione cinematica ed in particolare ai pali di fondazione, sono stati descritti nel seguito.

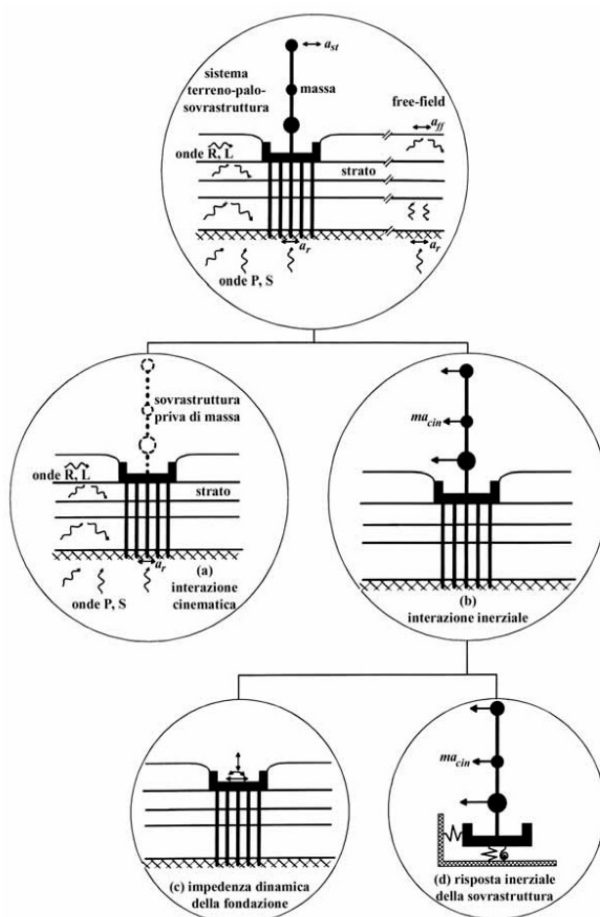


Figura 1.1.3: Metodo delle sottostrutture per l'analisi dell'interazione dinamica terreno-struttura attraverso la decomposizione in interazione cinematica e interazione inerziale (da Gazetas e Mylonakis, 1998)

## 1.2 L'INTERAZIONE CINEMATICA

Gli approcci di analisi suggeriti nella letteratura scientifica per lo studio della interazione cinematica del sistema palo-terreno si possono ricondurre a tre tipologie:

- metodi semplificati,
- analisi dinamiche semplificate con modello di sottosuolo alla Winkler (BDWF),
- analisi dinamiche basate sull'approccio al continuo.

I metodi semplificati consentono di ricavare soltanto le sollecitazioni nei pali ma non forniscono alcuna informazione riguardo alla variazione del moto sismico in superficie per effetto dell'interazione con il moto di *free-field*. Al contrario, gli altri due metodi consentono di modellare il problema di interazione in modo tale da ottenere oltre alle sollecitazioni anche l'alterazione del moto sismico in testa al palo.

Nelle analisi BDWF, l'interazione è schematizzata mediante un sistema di molle (lineari e non lineari) e smorzatori uniformemente distribuiti lungo il palo. Il moto *free-field* del terreno rappresenta l'input del sistema e può essere valutato tramite codici di calcolo (*EERA*, *MATLAB*, ecc.).

I parametri delle molle di rigidità  $k$  e degli smorzatori di smorzamento  $c$ , in generale dipendenti dalla frequenza, possono essere determinati da modelli teorici risolvendo il problema elastodinamico a deformazioni piana (Novak et al. 1978; Gazetas & Dobry, 1984) oppure da soluzioni numeriche rigorose (Kavvas & Gazetas, 1993; Nikolau et al. 1995; Mylonakis et al. 1997).

Malgrado la sua semplicità, il modello di Winkler si accorda molto bene con soluzioni ottenute da metodi più rigorosi (FEM, BEM); inoltre può tenere in conto una serie di fattori, quali effetti non lineari della risposta palo-terreno, scorrimenti, gapping, smorzamento radiante ed effetti di gruppo. (Nogami et al., 1992; El Naggar e Novak, 1995; Tahghighi e Konagai, 2007; Cairo et al., 2009; Dezi et al., 2009,2010).

Nei metodi basati sull'approccio al continuo, infine, l'interazione cinematica è valutata studiando il problema nella sua tridimensionalità, comprendendo il terreno e i pali. L'analisi, inoltre, può essere condotta sia nel dominio del tempo sia in quello delle frequenze.

Le tecniche di discretizzazione comunemente usate sono il metodo agli elementi finiti (FEM), il metodo degli elementi di contorno (BEM) (Basile, 2010), metodi ibridi FEM-BEM (Cairo et al., 2009) o

un metodo tridimensionale semplificato (quasi 3D) proposto da *Wu e Finn (1997)*.

Quest'ultima tecnica si basa su una formulazione semplificata delle equazioni tridimensionali della propagazione delle onde. Il metodo considera solo le onde di taglio nei piani  $y$ - $z$  e  $x$ - $y$  e le onde di compressione nella direzione  $y$  per valutare la risposta sismica di un elemento di terreno. Alcuni autori tra i quali *Aversa et al (2005)*, *Maiorano & Aversa (2006)*, *Maiorano et al (2007, 2008, 2009)* e *Moccia et al. (2009)* hanno effettuato studi con questo approccio.

Con la maggior parte dei metodi elencati in precedenza è possibile tenere in conto sia la non-linearità del comportamento del terreno sia non-linearità geometriche quali distacco all'interfaccia palo-terreno.

Sebbene nella maggior parte degli studi sull'analisi dinamica sia stato assunto un comportamento elastico lineare sia del palo sia del terreno (*Di Laora (2009)*, *Di Laora e Mandolini (2011)*, *Di Laora e Mandolini (2011)*, *De Sanctis et al. (2010)*, *Di Laora et al. (2011)*), in alcuni casi è stata tenuta in conto la non-linearità del terreno usando un mezzo lineare equivalente (*Wu e Finn, 1997*; *Cairo et al., 2009*), oppure sono stati introdotti modelli elastoplastici perfetti come Drucker-Prager (*Bentley e El Naggar, 2000*) e con incrudimento (*Maheshwari et al., 2004, 2005*).

In questo paragrafo sono stati riassunti inizialmente gli studi che hanno avuto come oggetto la valutazione delle sollecitazioni indotte nel palo e, successivamente, quelli che hanno preso in considerazione la modifica dei parametri del moto in testa al palo per effetto della interazione terreno-struttura. Infine nell'ultima parte del capitolo sono stati esaminati alcuni aspetti che influenzano in modo significativo l'interazione, come la profondità del contatto stratigrafico, il contenuto in frequenza dell'input sismico, lo smorzamento del terreno, la lunghezza del palo immersa nello strato inferiore e la non-linearità sia geometrica sia del materiale. A tal proposito, sono stati riportati studi pubblicati in letteratura che hanno messo in luce l'importanza di questi aspetti sia nei riguardi delle sollecitazioni indotte sia, dove è stato possibile, per quanto concerne la risposta del moto in testa al palo.

### 1.2.1 Valutazione dei momenti flettenti

Un primo tentativo finalizzato a tenere in conto gli effetti cinematici nei pali di fondazione è stato quello operato da *Margason (1975)*, successivamente ripreso nelle norme *NEHRP (1997)*, il quale ha ipotizzato che il palo segua fedelmente il moto del terreno nelle condizioni di *free-field*.

Infatti prendendo in considerazione l'equazione che descrive la propagazione del moto ondoso monodimensionale (1.2.2) e ipotizzando che la curvatura sia uguale alla derivata seconda dello spostamento (1.2.3), il momento flettente indotto in un palo immerso in un terreno omogeneo può essere espresso dalla equazione (*NEHRP, 1997*):

$$M(z, t) = E_p I_p \frac{a_{ff}(z, t)}{v_s^2} \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{v_s^2}\right) \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = \frac{a_{ff}(z, t)}{v_s^2} \quad (1.2.2)$$

$$\left(\frac{1}{R}\right) \approx \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial x^2} \quad (1.2.3)$$

Questa relazione ha una serie di limitazioni. Essa infatti vale solo per un palo incastrato in testa poiché in generale l'accelerazione è massima in superficie; non tiene conto della interazione palo-terreno e delle caratteristiche del palo (rapporto  $L/d$ , rigidità relativa  $E_p/E_t$ ) e, infine, vale solo per terreno omogeneo poiché al contatto tra due strati la curvatura  $(1/R)$  non è calcolabile. Se si volesse applicare ugualmente l'equazione per calcolare il momento flettente all'interfaccia determinando sia sopra sia sotto il valore della curvatura, si sottostimerebbe l'effettivo valore delle sollecitazioni. Questo effetto è stato dimostrato da *Kavvas & Gazetas (1993)* che hanno sottolineato come non possa essere trascurata l'interazione terreno-struttura per questo tipo di analisi (Figura 1.2.1).

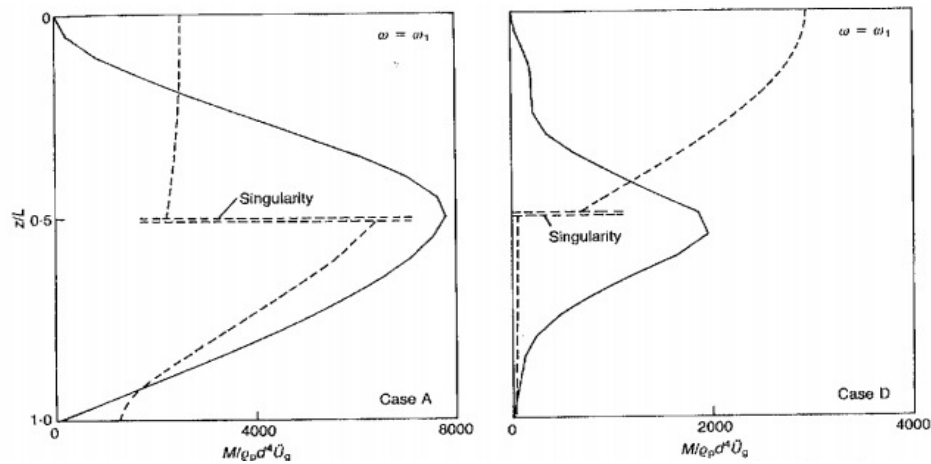


Figura 1.2.1: Distribuzione dei momenti flettenti in corrispondenza della frequenza fondamentale del deposito. La linea continua rappresenta la soluzione “esatta” mentre la linea tratteggiata mostra i valori calcolati sulla base della curvatura del terreno (ipotizzando che la curvatura del palo sia uguale a quest'ultima).

(Kavvadas & Gazetas, 1993)

Un metodo semplice per la determinazione del momento flettente di origine cinematica all'interfaccia tra due strati consecutivi di terreno è quello di *Dobry & O'Rourke (1983)*. Esso si basa sulle seguenti ipotesi:

- I) il terreno in ogni strato è omogeneo, isotropo ed elastico lineare;
- II) gli spessori degli strati sono sufficientemente elevati da poter trascurare gli effetti di bordo (es. Vincolo in testa al palo, piede del palo).
- III) il palo è lungo, verticale ed elastico lineare;
- IV) il contatto tra palo e terreno è perfetto;
- V) il terreno è sottoposto ad uno stato tensionale statico ( $\tau$ ) che genera una deformazione ( $\gamma$ ) costante nei due strati ( $\gamma_1 = \frac{\tau}{G_1}$ ;  $\gamma_2 = \frac{\tau}{G_2}$ ) ;
- VI) gli spostamenti indotti sono piccoli.

Sulla base di queste assunzioni, modellando il palo come una trave su un letto di molle (BWF), gli Autori hanno presentato una soluzione per il momento massimo all'interfaccia:

$$M \approx 1.86 (E_p I_p)^{3/4} (G_1)^{1/4} \gamma_1 F \quad (1.2.4)$$

$G_1$  = modulo di taglio nello strato superiore,

$\gamma_1$  = deformazione di taglio nello strato superiore,

$F = F(G_2/G_1)$  , funzione del rapporto dei due moduli,

$$F = \frac{(1 - c^{-4})(1 + c^3)}{(1 + c)(c^{-1} + 1 + c + c^2)}, c = (G_2/G_1)^{1/4}$$

Tale funzione  $F$  è monotona crescente e raggiunge il valore asintotico unitario per  $c \rightarrow \infty$  (Figura 1.2.2). Le molle utilizzate per il calcolo hanno una rigidezza pari a tre volte il modulo di taglio degli strati  $k_1 = 3G_1, k_2 = 3G_2$  .

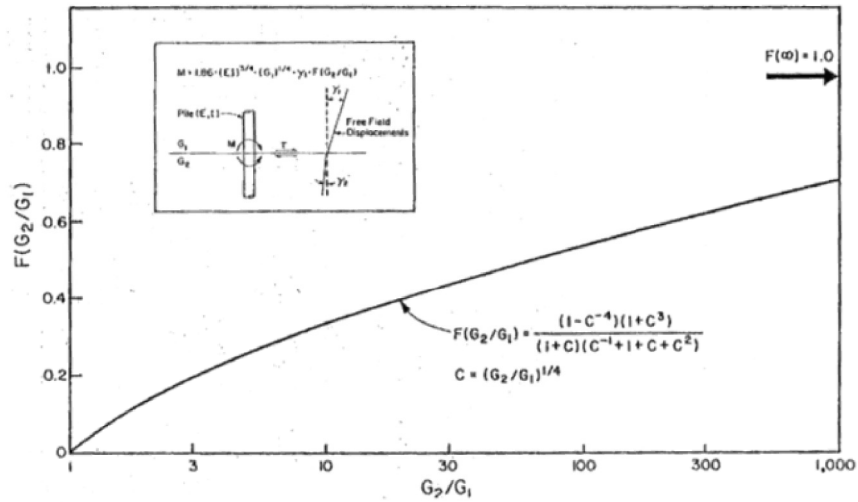


Figura 1.2.2: Funzione  $F$  al variare del contrasto di rigidezza tra gli strati.  
(Dobry & O'Rourke, 1983)

L'approccio semplicistico adottato nella norma *NEHRP* è stato quindi superato dal modello di *Dobry & O'Rourke* poiché esso, incorporando l'interazione tra il palo e il terreno, risolve il problema della singolarità all'interfaccia. Tuttavia, sia la natura dinamica dell'eccitazione sia la dimensione finita degli strati di terreno non vengono considerati. Inoltre, la relazione cade in difetto se si considera un mezzo omogeneo ( $G_1 = G_2$ ) per il quale si otterrebbe un momento cinematico nullo.

Basandosi su studi analitici condotti da *Flores-Berrones & Whitman (1982)*, *Barghouti (1984)* e da *Makris & Gazetas (1992)*, *Mylonakis (1999)* ha espresso lo spostamento del palo ( $Y(z)$ ) in funzione dello spostamento *free-field* del terreno ( $U_{ff}(z)$ ) e di un fattore adimensionale di risposta ( $\Gamma$ ) .

$$Y(z) = \Gamma U_{ff}(z) \quad (1.2.5)$$

$$\Gamma = \frac{k + i \omega c_d}{E_p I_p (q^4 + 4 \lambda^4)} \quad (1.2.6)$$

$$q = \frac{\omega}{V_s} \quad (1.2.7)$$

$$\lambda = \left( \frac{k + i \omega c - m \omega^2}{4 E_p I_p} \right)^{1/4} \quad (1.2.8)$$

$m$  = massa del palo per unità di lunghezza;

$$k = f\left(E, \frac{E_p}{E}, \frac{L}{d}\right) \quad ; (Dobry, 1982; Makris \& Gazetas, 1993)$$

$$c \approx 6a_0^{-1/4} \rho_s V_s d + 2\beta_s \frac{k}{\omega} \quad ; (Makris \& Gazetas, 1993)$$

$\beta_s$  = smorzamento del terreno;

Differenziando due volte rispetto alla profondità ( $z$ ), il rapporto tra le curvature di picco del palo e del terreno è stato ottenuto come:

$$\frac{(1/R)_p}{(1/R)_s} = \Gamma \quad (1.2.9)$$

Per un palo libero alla rotazione in testa ed infinitamente lungo, la soluzione assume la forma:

$$\frac{(1/R)_p}{(1/R)_s} = \Gamma \max[e^{-\lambda z} (\cos \lambda z + \sin \lambda z) - \cos q z] \quad (1.2.10)$$

L'espressione (1.2.10) indica chiaramente che la curvatura del palo non è uguale alla curvatura del terreno (come ipotizzato da *Margason (1975)* e *NEHRP (1997)*), il suo valore dipende dalle caratteristiche del terreno e del palo, dalla frequenza di eccitazione e dalla profondità considerata.

L'equazione è stata rappresentata in Figura 1.2.3 al variare del parametro  $a_0$ , per un palo cilindrico di diametro  $d$ . E' possibile notare infatti come per basse frequenze la curvatura del palo e del terreno siano pressoché uguali, mentre per frequenze del segnale più elevate il rapporto tra le curvature decresca monotonamente per tendere a zero quando  $a_0$  tende ad infinito. Questo effetto è più marcato quando la rigidità relativa palo-terreno è elevata.

Per un palo di lunghezza finita con testa vincolata alla rotazione e immerso in uno strato di spessore  $h$

che poggia sopra ad una base rigida, la curvatura è data dall'espressione:

$$\frac{(1/R)_p}{(1/R)_s} = \Gamma \left[ 1 + \left( \frac{q}{\lambda} \right)^2 \frac{\cos qh (\sinh \lambda h \cos \lambda h - \cosh \lambda h \sin \lambda h) + (q/\lambda) \cosh \lambda h \cos \lambda h \sin \lambda h}{\sinh 2\lambda h + \sin 2\lambda h} \right] \quad (1.2.11)$$

Se il palo, invece, ha una lunghezza pari allo spessore dello strato  $h$ , testa vincolata alla rotazione e piede libero di ruotare, la curvatura è data dalla espressione:

$$\frac{(1/R)_p}{(1/R)_s} = \Gamma \left[ 1 + \left( \frac{q}{\lambda} \right)^2 \frac{\cos qh [\cosh \lambda h \cos \lambda h + 2 \sinh \lambda h (\lambda/q)^2 [1/\Gamma - 1] \sin \lambda h]}{\cosh 2\lambda h + \cos 2\lambda h} \right] \quad (1.2.12)$$

Le equazioni sono state rappresentate in Figura 1.2.4 al variare del parametro  $a_0$  per un palo cilindrico di diametro  $d$ . E' possibile notare come per basse frequenze la curvatura del palo possa anche superare quella del terreno e incrementando la frequenza del segnale, il rapporto tra le curvature tenda a diminuire a causa dell'azione di filtro operato dal palo sulle alte frequenze. Non è possibile tuttavia stabilire una chiara relazione tra la curvatura e il diametro del palo.

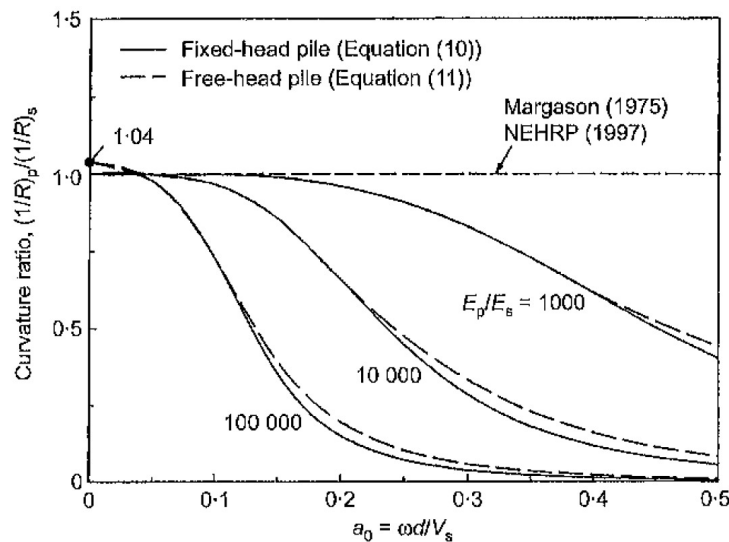


Figura 1.2.3: Rapporto tra la curvatura massima del palo infinitamente lungo (vincolato alla rotazione in testa) e quella del terreno, al variare del parametro  $a_0$ . Il sottosuolo è un semispazio omogeneo. Le curve rappresentano differenti condizioni di vincolo al piede.

$$\rho_s/\rho_p = 0.7 \quad ; \quad \nu = 0.4 \quad ; \quad \beta = 0.0$$

(Nikolaon et al., 2001).



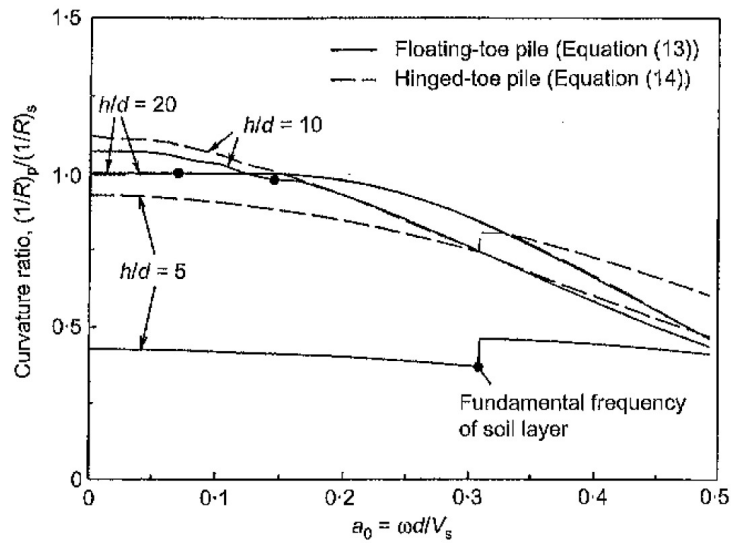


Figura 1.2.4: Rapporto tra la curvatura massima del palo (vincolato alla rotazione in testa) e quella del terreno, al variare del parametro  $a_0$ . Il sottosuolo è omogeneo e di spessore limitato. Le curve rappresentano differenti condizioni di vincolo al piede.

$$E_p/E_s = 1000; \quad \rho_s/\rho_p = 0.7; \quad \nu = 0.4; \quad \beta = 0.05 \quad .$$

(Nikolaou et al., 2001).

Mylonakis (1999) e poi Mylonakis (2001) hanno suggerito di utilizzare la deformazione come quantità rappresentativa al posto del momento flettente indotto. La grandezza scelta è stata la deformazione massima della fibra esterna della sezione del palo ( $\epsilon_p$ ) ed in questo modo si sono potuti ottenere i seguenti vantaggi: la deformazione è adimensionale, è misurabile sperimentalmente, può essere usata per quantificare il danno e il suo valore ultimo non varia significativamente tra i materiali strutturali comuni.

$$\epsilon_p = \left( \frac{M_{kin} r}{E_p I_p} \right) \quad (1.2.13)$$

L'espressione di Dobry & O'Rourke (1983) (1.2.4) può essere riscritta quindi nella seguente forma:

$$\epsilon_p = 2\lambda_1 r \gamma_1 F \quad (1.2.14)$$

$$\lambda_1 = \left( \frac{k_1}{4E_p I_p} \right)^{1/4} \quad (1.2.15)$$

Per un palo a sezione circolare, l'espressione assume la forma

$$\frac{\epsilon_p}{\gamma_1} = 1.5 \left( \frac{k_1}{E_p} \right)^{1/4} F, \quad (1.2.16)$$

indicando che la deformazione massima è indipendente dal diametro del palo e quindi la diminuzione del diametro del palo non porta ad alcun beneficio.

A differenza di *Dobry & O'Rourke (1983)*, il parametro  $k$  dipende da molti fattori oltre al modulo del terreno e può essere ricavato dalla relazione di *Kavvas & Gazetas (1993)*:

$$\delta = \frac{k_1}{E_1} = \frac{k_2}{E_2} \quad (1.2.17)$$

$$\delta = \frac{3}{1-\nu^2} \left( \frac{E_p}{E_1} \right)^{-1/8} \left( \frac{L}{d} \right)^{1/8} \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{1/12} \left( \frac{G_2}{G_1} \right)^{-1/30} \quad (1.2.18)$$

La dipendenza di  $\epsilon_p$  da  $k$  è molto modesta poiché  $k$  è elevato a 0.25 e qualsiasi variazione viene notevolmente attenuata.

Oltre a considerare la deformazione come parametro rappresentativo, *Mylonakis (2001)* ha introdotto alcuni miglioramenti rispetto ai metodi di *Margason (1975)*, *NEHRP (1997)* e *Dobry & O'Rourke (1983)*:

- l'eccitazione sismica dinamica è imposta alla base della stratigrafia, sotto forma di un'onda sinusoidale monofrequenza (  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$  ),
- lo smorzamento di radiazione e quello del materiale sono tenuti in conto introducendo smorzatori viscosi in parallelo alle molle e sostituendo il modulo di taglio del materiale con il modulo complesso  $G^* = G[1 + 2i\xi]$  ,
- le caratteristiche geometriche della stratigrafia ( $h_1, h_2$ ) e l'inerzia del terreno sono incorporate nelle proprietà delle onde *SH* che si propagano negli strati,
- è possibile tenere conto solamente della non linearità dell'interfaccia palo-terreno ma non di quella indotta a seguito del moto sismico.

*Nikolaou et al. (2001)* hanno sostenuto, tuttavia, che il ruolo della non linearità potrebbe non essere così significativo ai fini della valutazione delle sollecitazioni all'interfaccia, poiché il confinamento a quella profondità è elevato (se la sua profondità è maggiore della lunghezza attiva del palo) e il movimento indotto al palo non è così importante come quello della testa.

Con questo modello, le deformazioni di picco in corrispondenza dell'interfaccia possono essere espresse nella forma:

$$\epsilon_p = 2\lambda_1 r \gamma_1 F \quad (1.2.19)$$

$$F = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (S_1 + S_2) - [\lambda_2 (S_3 + S_4) + \lambda_1 S_5] \cot(h_1 q_1)}{2\lambda_1 q_1 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \quad (1.2.20)$$

$$S_1 = 2(\Gamma_1 q_1 - \Gamma_2 q_2 I_R)(\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) \quad (1.2.21)$$

$$S_2 = -\Gamma_1 q_1^3 + \Gamma_2 q_2^3 I_R \quad (1.2.22)$$

$$S_3 = 2(\Gamma_1 - \Gamma_2) \lambda_1^2 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \quad (1.2.23)$$

$$S_4 = \Gamma_1 q_1^2 (2\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) \quad (1.2.24)$$

$$S_5 = \Gamma_2 q_2^2 (\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + 2\lambda_2^2) \quad (1.2.25)$$

$$q_1 = \frac{\omega}{V_{s1}^*} \quad (1.2.26)$$

$$q_2 = \frac{\omega}{V_{s2}^*} \quad (1.2.27)$$

$$\Gamma_1 = \frac{4\lambda_1^4}{q_1^4 + 4\lambda_1^4} \quad (1.2.28)$$

$$\Gamma_2 = \frac{4\lambda_2^4}{q_2^4 + 4\lambda_2^4} \quad (1.2.29)$$

$$I_R = \frac{\rho_1 V_{s1}^*}{\rho_2 V_{s2}^*} \quad (1.2.30)$$

Per un sottosuolo omogeneo e per un palo cilindrico, l'equazione diventa la numero 1.2.31, molto simile alla corrispondente “funzione di trasmissibilità di deformazione” ottenuta dal modello di *Margason (1975)*.

$$\frac{\epsilon_p}{\gamma_1} = \Gamma \frac{\omega d}{2 V_s^*} \quad (\text{Mylonakis, 2001}), \quad (1.2.31)$$

$$\frac{\epsilon_p}{\gamma_1} = \frac{\omega d}{2 V_s} \quad (\text{Margason, 1975}) \quad (1.2.32)$$

Per basse frequenze,  $\Gamma$  è circa pari ad 1,  $V_s^* = V_s$  e quindi l'equazione 1.2.31 si riconduce alla 1.2.32. Il palo si muove come un corpo rigido perciò non viene indotta alcuna deformazione. Per alte frequenze, invece, il palo resiste principalmente tramite la sua inerzia, la quale conduce a zero la deformazione indotta. In un intervallo di frequenze intermedio, la deformazione indotta è funzione della rigidezza palo–terreno (Figura 1.2.5).

*Mylonakis*, inoltre, ha fornito una soluzione analitica in forma chiusa per un palo cilindrico immerso in un terreno stratificato ( $\omega \rightarrow 0$ ) :

$$\left(\frac{\epsilon_p}{\gamma_1}\right)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{(c^2 - c + 1) \left[ \left( 3 \left( \frac{k_1}{E_p} \right)^{1/4} \left( \frac{h_1}{d} \right) - 1 \right) c(c-1) - 1 \right]}{2c^4 \frac{h_1}{d}} \quad (1.2.33)$$

La relazione conduce a risultati del tutto convincenti se si analizzano casi in cui la profondità dell'interfaccia è superiore alla lunghezza attiva del palo (calcolata con la relazione di *Randolph* (1981)):

$$L_a \approx 1.5 (E_p / E_s)^{0.25} d$$

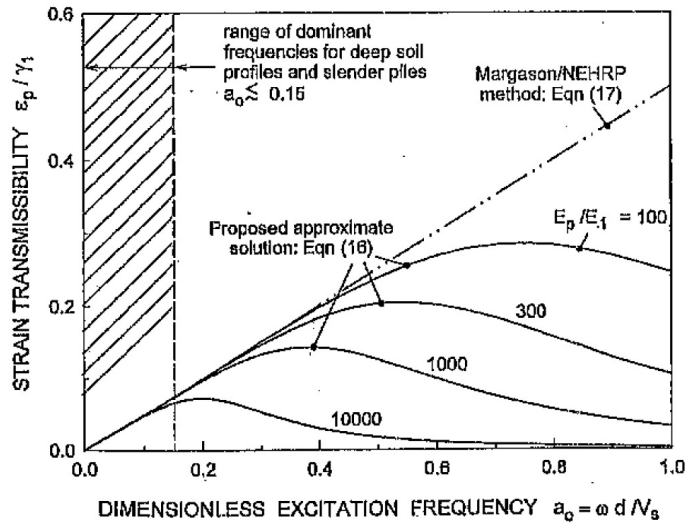


Figura 1.2.5 : La trasmissibilità della deformazione per un palo cilindrico immerso in uno strato omogeneo sottoposto alla propagazione verticale di onde armoniche SH.

$$\rho_s / \rho_p = 0.7 ; \quad \nu = 0.4 ; \quad \beta = 0.0$$

(*Mylonakis*, 2001).

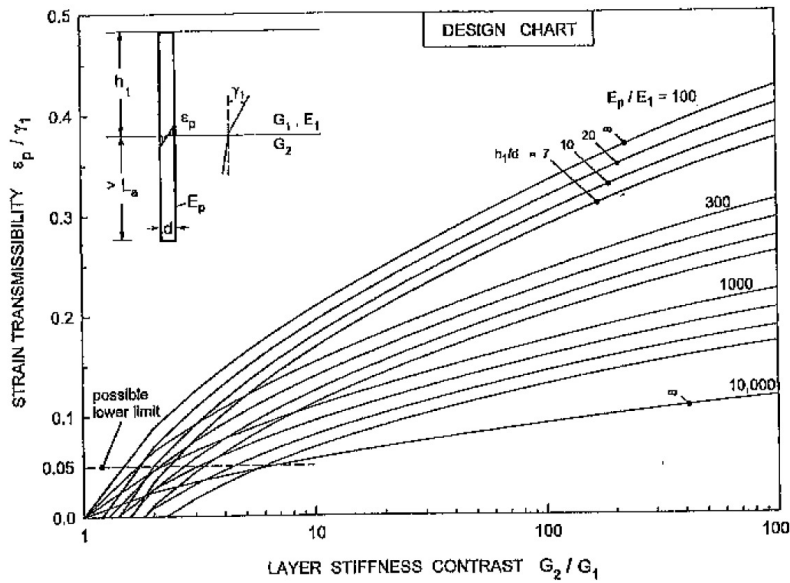


Figura 1.2.6: Rapporto tra la deformazione  $\epsilon_p$  in un palo verticale a sezione circolare e la deformazione di taglio di *free-field*  $\gamma_1$  all'interfaccia di due strati di terreno di differente rigidezza, per eccitazione sismica a bassa frequenza. Le curve sono state ricavate per rapporti  $h_1/d = \infty, 20, 10, 7$ .  $L_a$  denota la lunghezza “attiva” del palo. (Mylonakis, 2001).

Per tenere in conto l'effettivo contributo della frequenza di un segnale sismico, *Mylonakis (2001)* ha suggerito di moltiplicare il valore del coefficiente  $(\epsilon_p / \gamma_1)_{\omega \rightarrow 0}$  con un coefficiente  $\Phi$  che dipende dalla frequenza del segnale ( $\omega$ ), dal contrasto di rigidezza tra gli strati ( $G_2 / G_1$ ) e dal rapporto di rigidezza palo-terreno ( $E_p / E_1$ ). In generale tale coefficiente correttivo non supera il valore 1.25 (Figura 1.2.7).

*Maiorano et al. (2009)*, sulla base di analisi 3D FEM con il codice VERSAT-P3D (*Wu, 2006*), hanno proposto valori maggiori del coefficiente  $\Phi$  che variano da 1.3 a 1.39 (i valori più alti sono validi in corrispondenza della risonanza).

*Sica et al. (2011)*, al contrario, sulla base di analisi BDWF hanno fornito valori di  $\Phi$  di circa 1.2 per sottosuoli con rapporto  $V_{s,1} / V_{s,2}$  compreso tra  $1/3$  e  $1/4$ .

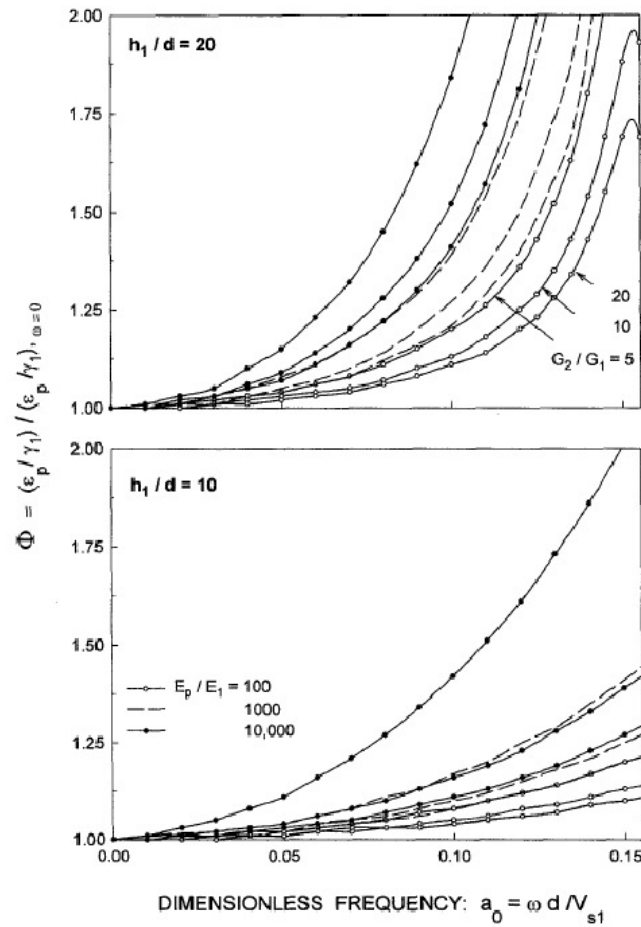


Figura 1.2.7: Variazione con la frequenza della trasmissibilità della deformazione  $\epsilon_p / \gamma_1$ .  
(Mylonakis, 2001)

Per ottenere il momento flettente dalla relazione di *Mylonakis* è necessario stimare in modo ragionevole la deformazione  $\gamma_1$  all'interfaccia tra gli strati, perciò gli Autori consigliano di utilizzare la relazione di *Seed e Idris (1982)* se il moto è noto in corrispondenza del piano campagna (eq. n°1.2.34 e 1.2.35), oppure suggeriscono di avvalersi di un codice che consenta di studiare la risposta sismica locale monodimensionale.

$$\gamma_1 = \frac{r_d \rho_1 h_1 a_s}{G_1} \quad (1.2.34)$$

$$r_d \approx 1 - 0.015 z \quad (1.2.35)$$

Dopo aver opportunamente tenuto conto delle rigidezze del terreno compatibili con la deformazione effettivamente raggiunta a seguito dell'evento sismico, il momento flettente indotto nel palo è quindi

calcolato con la relazione:

$$M = (E_p I_p) \left( \frac{\epsilon_p}{\gamma_1} \right) \gamma_1 \Phi r \quad (1.2.36)$$

Un metodo alternativo è stato ideato da *Nikolau et al. (2001)*. A valle di uno studio parametrico composto da 32 casi, sia con palo a testa libera sia vincolata e condotto con un approccio BDWF nel dominio delle frequenze, gli Autori hanno ricavato una espressione in forma chiusa del massimo momento flettente all'interfaccia in condizioni stazionarie.

$$M_{max}(\omega) = 0.042 \tau_c d^3 \left( \frac{L}{d} \right)^{0.3} \left( \frac{E_p}{E_1} \right)^{0.65} \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{0.5} \quad (1.2.37)$$

- $L$  e  $d$ : lunghezza e diametro del palo;
- $E_p$  e  $E_1$ : modulo elastico del palo e modulo elastico dello strato superiore del terreno;
- $v_1$  e  $v_2$ : velocità di propagazione delle onde di taglio nello strato superiore e inferiore.

L'espressione, valida solo se l'interfaccia si trova ad una profondità superiore della lunghezza attiva del palo, si basa sullo sforzo di taglio “caratteristico” che è proporzionale al reale sforzo di taglio agente all'interfaccia tra i due strati ed è funzione dell'accelerazione *free-field* in superficie.

$$\tau_c \approx a_s \rho_1 h_1 \quad (1.2.38)$$

- $a_s$ : accelerazione di picco in corrispondenza della superficie;
- $\rho_1$  e  $h_1$ : densità e spessore del primo strato di terreno.

La relazione (1.2.37) indica che il momento flettente tende ad incrementare se si aumenta il diametro, il contrasto di rigidezza tra palo e terreno e il contrasto di rigidezza tra gli strati.

Per una data frequenza di eccitazione, la deformazione di origine cinematica in corrispondenza dell'interfaccia dipende anche dalla vicinanza del periodo di eccitazione ( $T$ ) al periodo fondamentale del deposito ( $T_1$ ). Infatti, *Nikolau et al. (2001)* hanno mostrato in Figura 1.2.8 che la deformazione massima ha un comportamento molto simile alla funzione di trasferimento del deposito, avendo un massimo in corrispondenza del periodo  $T_1$  e attenuandosi notevolmente lontano dalle condizioni di risonanza.

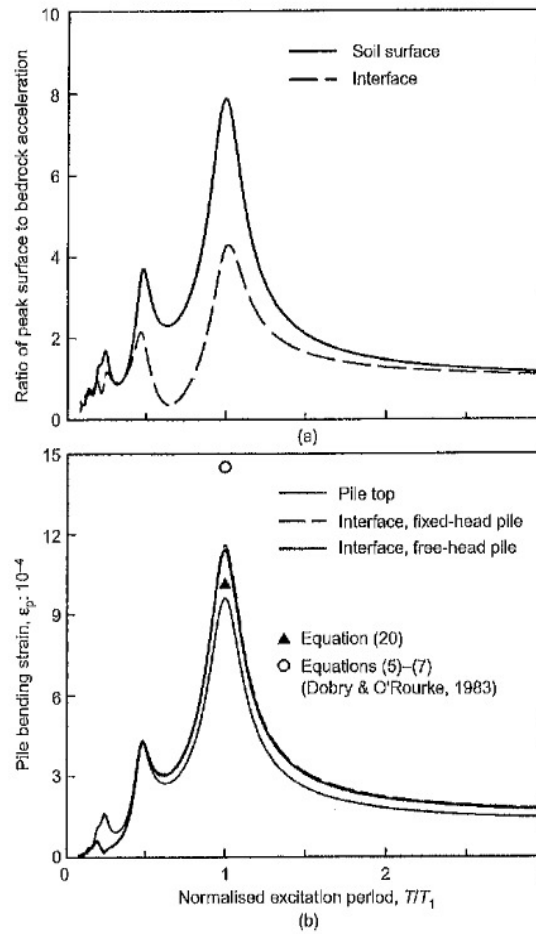


Figura 1.2.8: Ampiezze della risposta in condizioni stazionarie: (a) risposta *free-field*; (b) in presenza di un palo immerso in un terreno costituito da due strati.

Inoltre, se si considera come azione un input sismico reale, la relazione ottenuta è ancora valida ma i picchi di sollecitazione indotti sono più bassi di quelli ottenuti da input armonici. Per il calcolo del momento flettente massimo all'interfaccia gli Autori hanno suggerito di utilizzare un coefficiente  $\eta$ , funzione della durata dell'accelerogramma, rappresentato quest'ultimo in termini di numero di cicli equivalenti ( $N_c$ ).

In definitiva le espressioni fornite sono due (1.2.39), valide rispettivamente in presenza e in assenza di risonanza dello strato e rappresentate in Figura 1.2.9.

$$\eta = \frac{M_t(\omega)}{M_{max}(\omega)} = \begin{cases} 0.04 N_c + 0.23 & T \approx T_1 \\ 0.015 N_c + 0.17 \approx 0.2 & T \neq T_1 \end{cases} \quad (1.2.39)$$



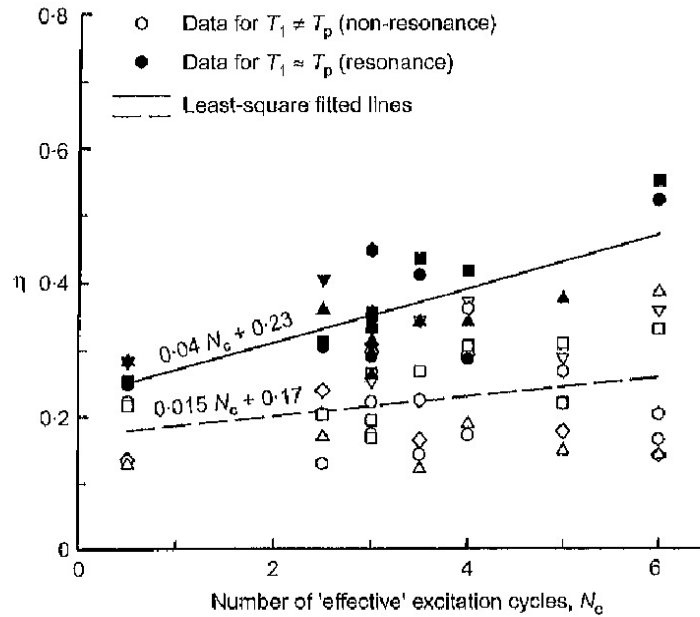


Figura 1.2.9: Relazioni proposte per il fattore di riduzione  $\eta$  come funzione del numero di cicli effettivi del terremoto e condizioni di risonanza.  
(Nikolaou et al., 2001)

Sica et al. (2011) hanno condotto un esteso studio parametrico su un palo singolo immerso in due strati di terreno, per il quale lo spessore dello strato superiore è maggiore della lunghezza attiva del palo. Nello studio parametrico è stato adottato l'approccio BDWF di Mylonakis et al. (1997) utilizzando una serie di accelerogrammi italiani. Gli Autori hanno correlato il parametro  $\eta$  al rapporto tra  $T/T_1$ , dove  $T_1$  è il periodo proprio del deposito mentre  $T$  è il periodo fondamentale dell'accelerogramma calcolato con la relazione di Rathje et al. (1998):

$$T = \frac{\sum_i \frac{C_i^2}{f_i}}{\sum_i C_i^2} \quad (1.2.40)$$

$f_i$  = frequenza compresa tra 0.25 Hz e 20 Hz;

$C_i$  = ampiezza dello spettro di Fourier corrispondente alla frequenza  $f_i$ .

A seguito di una regressione su circa 300 valori, gli Autori hanno ottenuto una nuova correlazione valida per condizioni che sono lontane dalla risonanza. Il valore medio è rappresentato dalla seguente espressione, che risulta indipendente dal numero di cicli dell'input sismico:

$$\eta = 0.68 \left( \frac{T}{T_1} \right)^{-1.5} \quad \text{per } T > 1.5 T_1 \quad (1.2.41)$$

Al contrario, quando il periodo fondamentale del deposito è molto prossimo al periodo dominante dell'accelerogramma, il numero di cicli  $N_c$  del segnale diventa significativo rispetto al rapporto  $T/T_1$ .

*Cairo et al. (2011)*, a valle di uno studio parametrico, hanno proposto altre due correlazioni per il fattore correttivo. La prima è funzione del rapporto  $T/T_1$  che, a differenza di *Sica et al. (2011)*, è valida per tutte le condizioni e non solo quelle lontane dalla risonanza. Il valore medio è rappresentato dalla seguente espressione:

$$\eta = 0.624 \left( \frac{T}{T_1} \right)^{-1.378} \quad \text{per } T > T_1 \quad (1.2.42)$$

$$\eta = 0.205 + 0.42 \left( \frac{T}{T_1} \right) \quad \text{per } T \leq T_1 \quad (1.2.43)$$

La seconda correlazione, invece, è funzione della  $V_{s,30}$  e della intensità di risposta spettrale SI:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 SI + \beta_2 V_{s,30} + \epsilon \sigma_n \quad (1.2.44)$$

La risposta sismica spettrale è stata definita da *Housner (1959)* come:

$$SI = \int_{0.1}^{2.5} S_{PV}(\beta, T) dT \quad (1.2.45)$$

dove  $S_{PV}(\beta, T)$  è lo spettro di risposta delle pseudo-velocità,  $\beta$  è lo smorzamento utilizzato (tipicamente il 5%) e  $T$  è il periodo della struttura che generalmente si trova nell'intervallo tra 0.1s e 2.5s.  $\epsilon$  è il fattore che rappresenta la probabilità di eccedenza per una distribuzione lognormale (pari a 1.6448, valore che corrisponde alla probabilità di eccedenza del 5%) e  $\sigma_n$  è la deviazione standard (pari a 0.0898). SI e  $V_{s,30}$  sono espresse in cm e m/s rispettivamente.

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$  sono parametri della regressione rappresentati in tabella sottostante.

Coefficient	Value	Standard deviation	$\pm$
$\beta_0$	-0.1617	0.01869	0.03681
$\beta_1$ (cm <sup>-1</sup> )	0.0023	0.00011	0.00021
$\beta_2$ (s/m)	0.0013	0.00010	0.00020

*Simonelli e Sica (2008)* e *Maiorano et al. (2008)* hanno proposto altre applicazioni dell'equazione originale di *Nikolaou et al. (2001)*. Infatti, essi hanno sostituito nella equazione di *Nikolaou et al. (2001)* al posto della  $\tau_c$  calcolata con 1.2.38, la tensione di taglio agente all'interfaccia calcolata con *EERA* (*Bardett et al. 2000*).

$$M_{max, \tau=\tau_{EERA}} = 0.042 \tau_{EERA} d^3 \left(\frac{L}{d}\right)^{0.3} \left(\frac{E_p}{E_1}\right)^{0.65} \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{0.5} \approx M_{max}(t) \quad (1.2.46)$$

Questa equazione non fornisce più il massimo momento flettente cinematico nel dominio delle frequenze ma proprio un valore molto prossimo al momento flettente massimo nel dominio del tempo per un particolare input. Per questa ragione il fattore correttivo  $\eta$  non deve essere applicato in questo caso.

Anche *Aversa et al. (2009)* hanno proposto due relazioni derivate da quella di *Nikolaou et al. (2001)*. A valle di uno studio parametrico 3D FEM condotto con il codice VERSAT-P3D (*Wu, 2006*) ed utilizzando una serie di accelerogrammi reali, gli Autori hanno trovato le seguenti espressioni:

$$b = d^3 \left(\frac{L}{d}\right)^{0.3} \left(\frac{E_p}{E_1}\right)^{0.65} \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{0.5} \quad (1.2.47)$$

$$\frac{M_{max}(t)}{b} \approx \frac{M_{max, \tau=\tau_{EERA}}}{b} = 0.071 \tau_{EERA} \quad (1.2.48)$$

$$\frac{M_{max}(t)}{b} \approx \frac{M_{max, \gamma_1=\gamma_{1,EERA}}}{b} = 0.071 G_1 \gamma_{1,EERA} \quad (1.2.49)$$

Nella sua tesi di Dottorato, *Di Laora (2009)* ha studiato le sollecitazioni di origine cinematica in un palo isolato quando esso è immerso in un terreno stratificato. Egli ha condotto un esteso studio parametrico composto da 612 casi utilizzando la tecnica agli elementi finiti (FEM) facendo variare il contrasto di rigidezza, la rigidezza relativa palo-terreno, il diametro del palo e lo spessore dello strato deformabile superiore. Nello studio parametrico sono stati considerati diversi accelerogrammi reali e sono state ricavate relazioni semplificate per valutare il momento flettente massimo in corrispondenza della testa e del contatto stratigrafico. Tutti i risultati sono stati espressi in funzione della deformazione massima

$\epsilon_p$  (Mylonakis, 1999).

Per quanto riguarda il momento flettente in corrispondenza del contatto stratigrafico (nell'ipotesi  $h_1 > L_a$ ), *Di Laora* ha ritenuto che la flessione del palo sia influenzata dalla deformazione di taglio in una zona prossima al contatto stratigrafico e, per questa ragione, ha valutato la deformazione di taglio ad un diametro di distanza dal contatto stratigrafico. La relazione, rappresentata in Figura 1.2.10, mostra una modesta dispersione.

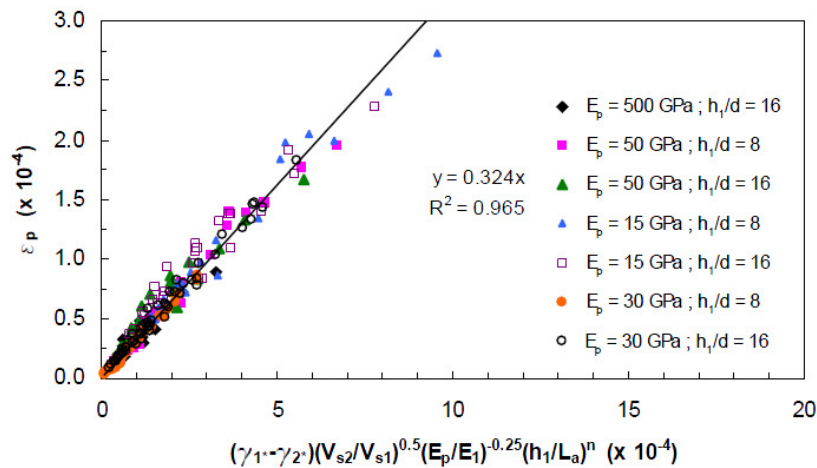


Figura 1.2.10: Correlazione tra la deformazione indotta nel palo e deformazione nel terreno, calcolata a  $h_1-d$  ( $\gamma_1^*$ ) ed a  $h_1+d$  ( $\gamma_2^*$ ). (*Di Laora (2009)*).

*Di Laora* ha inoltre individuato una stretta dipendenza della deformazione massima  $\epsilon_p$  in corrispondenza della testa del palo dalla quantità  $a_{pile} r / v_{sl}^2$ , ottenendo una bassissima dispersione (Figura 1.2.11). Anche in questo caso, la relazione è valida solo quando lo spessore dello strato superiore è maggiore della lunghezza attiva del palo ( $h_1 > L_a$ ).

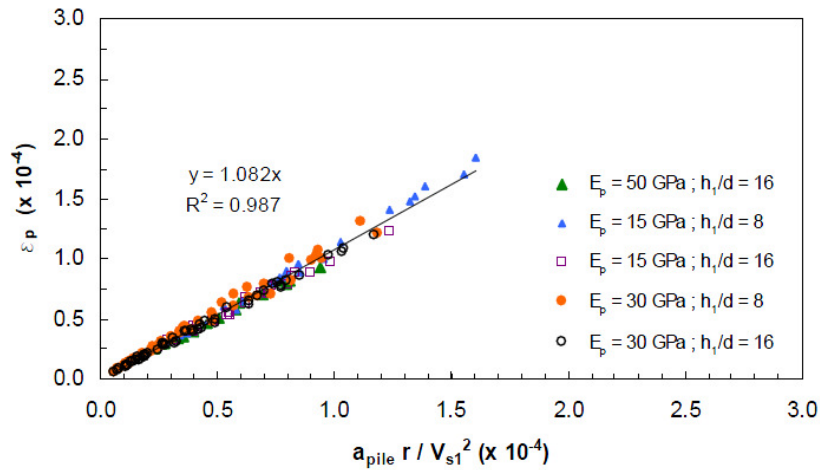


Figura 1.2.11: Deformazione del palo in corrispondenza della testa, per il caso  $h_1 > L_a$ . (Di Laora (2009)).

Uno studio parametrico condotto da *Dezi et al. (2010)* con l'ausilio della tecnica BDWF, ha esaminato la risposta dinamica di un palo isolato immerso in un terreno costituito da due strati elastici lineari di rigidezza differente. La velocità di propagazione delle onde di taglio dello strato superiore è stata fatta variare da un minimo di 100 m/s ad un massimo di 400 m/s. Al contrario, lo strato inferiore (*bedrock*) è stato considerato poco deformabile ( $V_s = 800 \text{ m/s}$ ). Come input sismico è stato considerato un accelerogramma artificiale tale da riprodurre lo spettro elastico di risposta dell'EC8 (Tipo 1) per sottosuolo di classe A e PGA pari a 0.25g.

I risultati dello studio parametrico sono stati sintetizzati in relazioni empiriche che consentono di ricavare i momenti massimi in testa ed in corrispondenza del contatto stratigrafico. Le relazioni ricavate hanno la forma:

$$M(V_s, D, h, PGA) \approx \frac{PGA}{0.25g} M_{400}(D, h) e^{f(D, h)(V_s - 400)} \quad (1.2.50)$$

- $\frac{PGA}{0.25g}$  tiene conto degli effetti di differenti input sismici;
- $h$  rappresenta lo spessore dello strato superiore;
- $D$  rappresenta il diametro del palo.

Per valutare il momento in corrispondenza del contatto stratigrafico è suggerito l'uso della seguente relazione:

$$M_{400}(D, h) = (77.4D^3 + 409D^2 - 192D + 24.5)(-0.0009h^2 + 0.068h - 0.2) \quad (1.2.51)$$

Per valutare il momento in corrispondenza della testa del palo, invece:

$$M_{400}(D, h) = (85D^3 - 85.75D^2 + 30.93D - 3.37)(0.000133h^2 - 0.00042h + 1.091) \quad (1.2.52)$$

$$f(D, h) = (0.000067h - 0.0113)(-0.07D + 1.002) \quad (1.2.53)$$

*Di Laora et al. (2011)* hanno ricavato una relazione semplificata che consente di determinare la deformazione massima in corrispondenza della sezione di interfaccia in funzione del rapporto di rigidezza tra lo strato superiore e il palo ( $E_p/E_t$ ), del rapporto tra profondità dell'interfaccia e diametro del palo ( $h_1/d$ ), dal rapporto di rigidezza tra i due strati ( $G_1/G_2$ ) e della deformazione di taglio dello strato superiore in corrispondenza dell'interfaccia.

$$\epsilon_p = \alpha \gamma_1 \left( -\frac{1}{2} \frac{h_1}{d} + \left( \frac{E_p}{E_1} \right)^{-0.25} (c-1)^{0.5} \right); \alpha = 0.93 \approx 1 \quad (1.2.54)$$

Gli studi effettuati per ricavare tutte le relazioni semplificate riportate fino a qui nel presente capitolo, hanno fatto riferimento a strati di terreno omogenei, elastici lineari e con rigidezza costante con la profondità. Non è stata tenuta conto in alcun modo della dipendenza della rigidezza dallo stato tensionale. Un primo tentativo è stato portato a termine da *Di Laora e Mandolini (2011)* i quali, basandosi sull'analisi dimensionale, hanno ricavato una espressione che consente di valutare il massimo momento flettente in testa nelle ipotesi di rotazione della testa impedita e di rigidezza del terreno variabile con la profondità (Figura 1.2.12). In queste condizioni le sollecitazioni non dipendono solo dall'accelerazione massima in superficie, come in *Di Laora 2009* e *NEHRP 1997*, ma anche dal grado di disomogeneità e dal rapporto tra la lunghezza caratteristica ( $\lambda$ ) e diametro  $d$ . All'aumentare di quest'ultimo, infatti, la lunghezza caratteristica aumenta e la curvatura del palo diminuisce (dalle equazioni 1.2.55, 1.2.56 e 1.2.57).

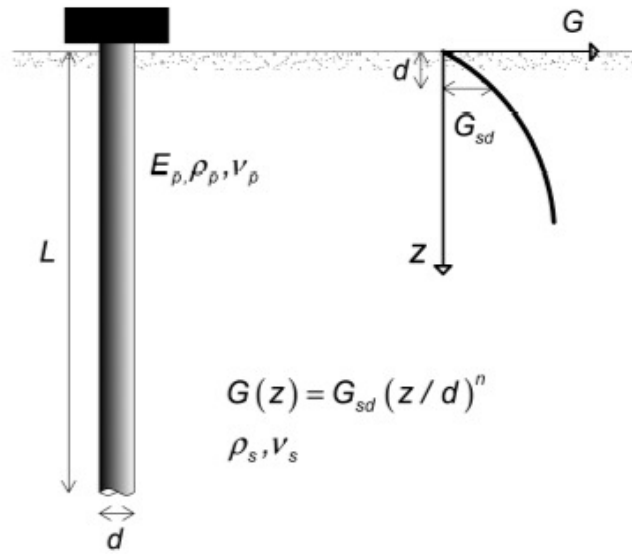


Figura 1.2.12: Profilo della rigidezza con la profondità.  
(da Di Laora e Mandolini (2009))

$$G_z = G_{sd} \left( \frac{z}{d} \right)^n \quad (1.2.55)$$

$$\left( \frac{1}{R} \right)_p = \left( 1 - \frac{n}{\pi} \right) \frac{a_s \rho_s}{G_{sd} \left( \frac{\lambda}{d} \right)^n} \quad (1.2.56)$$

$$\lambda = \left( \frac{E_p I d^n}{E_{sd}} \right)^{\frac{1}{4+n}} \quad (1.2.57)$$

### 1.2.2 Modifica dei parametri del moto

Un palo immerso nel terreno, quando esso è sottoposto al passaggio di onde sismiche, genera altre onde che si propagano in direzione ortogonale alla linea d'asse proprio a causa della interazione. Il moto sismico risultante in testa è quindi diverso dal moto di *free-field* e la testa del palo può anche manifestare un moto di rotazione.

Gli aspetti relativi alla modifica del moto sismico per effetto della interazione cinematica sono stati studiati approfonditamente da *Gazetas (1984)* e da *Fan et al.(1991)*, con il metodo degli elementi al contorno (BEM). Gli Autori hanno condotto analisi parametriche sul palo singolo e su gruppi di pali, in terreni omogenei e stratificati, sottoposti ad eccitazioni armoniche monofrequenza.

*Gazetas (1984)* ha introdotto i *fattori di interazione cinematica* per gli spostamenti e rotazioni:

$$I_u = \frac{|u_p|}{u_{ff}} \quad (1.2.58)$$

$$I_\varphi = \frac{|\varphi_p|d}{2u_{ff}} \quad (1.2.59)$$

dove  $u_p$  e  $\varphi_p$  sono gli spostamenti e le rotazioni della testa del palo, mentre  $u_{ff}$  è lo spostamento del terreno in condizioni di *free-field*. Inoltre, egli ha definito i *fattori di amplificazione cinematica* come:

$$A_u = \frac{|u_p|}{u_g} \quad (1.2.60)$$

$$A_\varphi = \frac{|\varphi_p|d}{2u_g} \quad (1.2.61)$$

dove  $u_g$  è lo spostamento del *bedrock* rigido. I quattro fattori sono funzioni complesse ma lo studio porta in conto solo le ampiezze. Lo studio ha considerato tre tipi di terreno: il tipo *A* nel quale il modulo  $E(z)$  è proporzionale alla profondità, il tipo *B* nel quale il modulo  $E(z)$  è proporzionale alla radice quadrata di  $z$  mentre il tipo *C* nel quale il modulo è costante con la profondità.



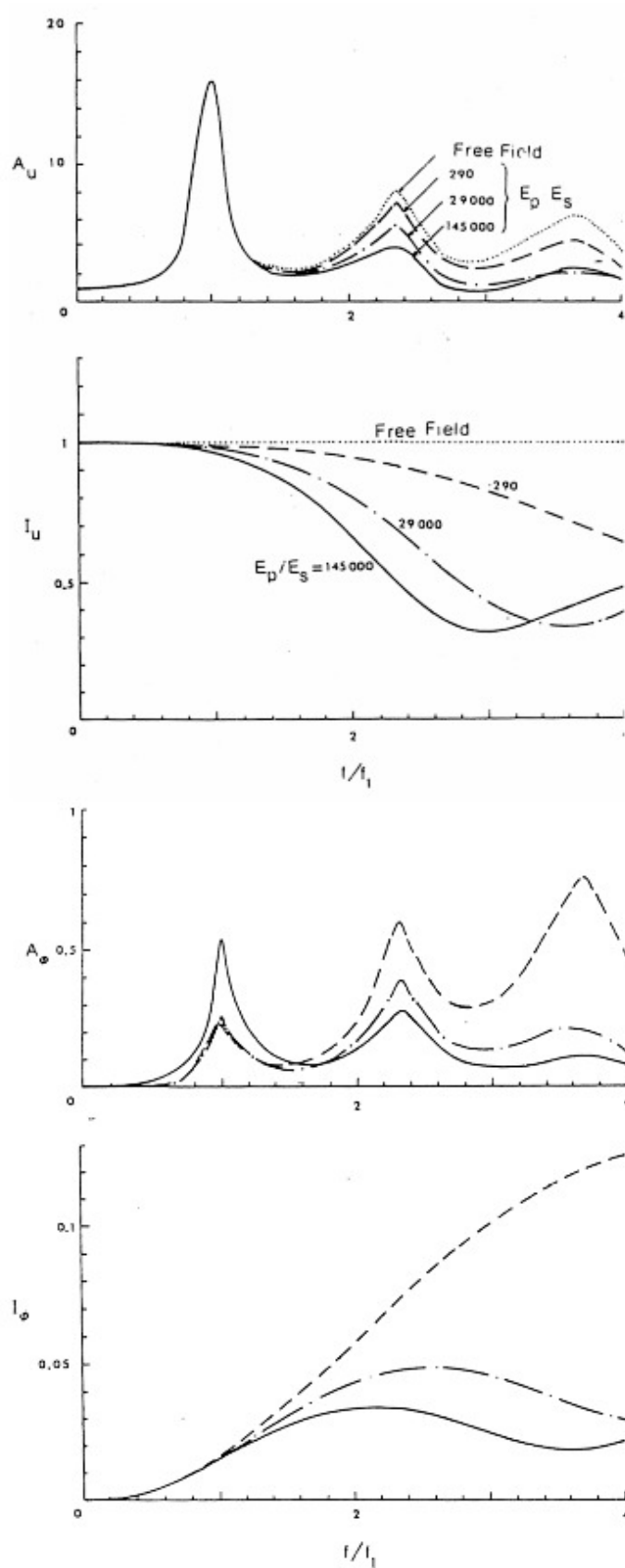


Figura 1.2.13: Influenza di  $E_p/E_s$  ( $L/d=40$ ; terreno tipo A;  $\beta_s=0.05$ ,  $\nu_s=0.40$ ,  $\rho_p/\rho_s=1.60$ ) (Gazetas, 1984)

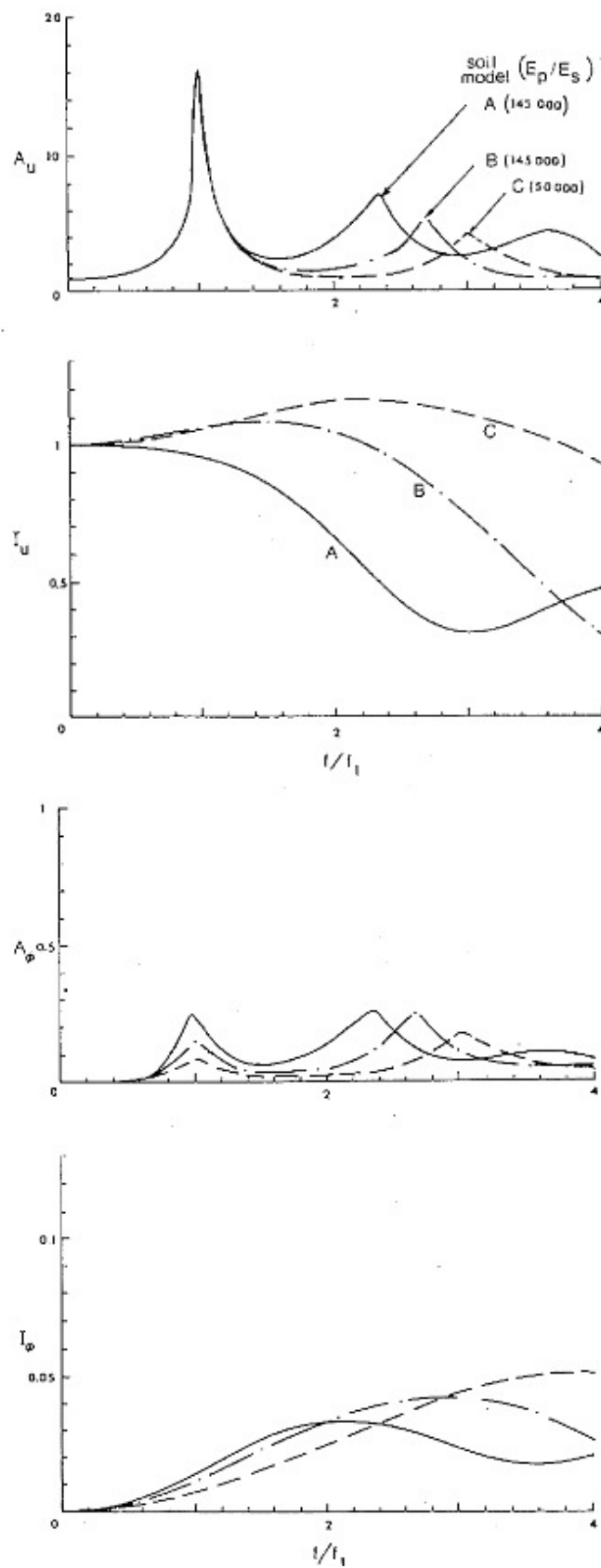


Figura 1.2.14: Influenza delle proprietà del terreno ( $L/d=40$ ;  $\beta_s=0.05$ ,  $\nu_s=0.40$ ,  $\rho_p/\rho_s=1.60$ ) (Gazetas, 1984).

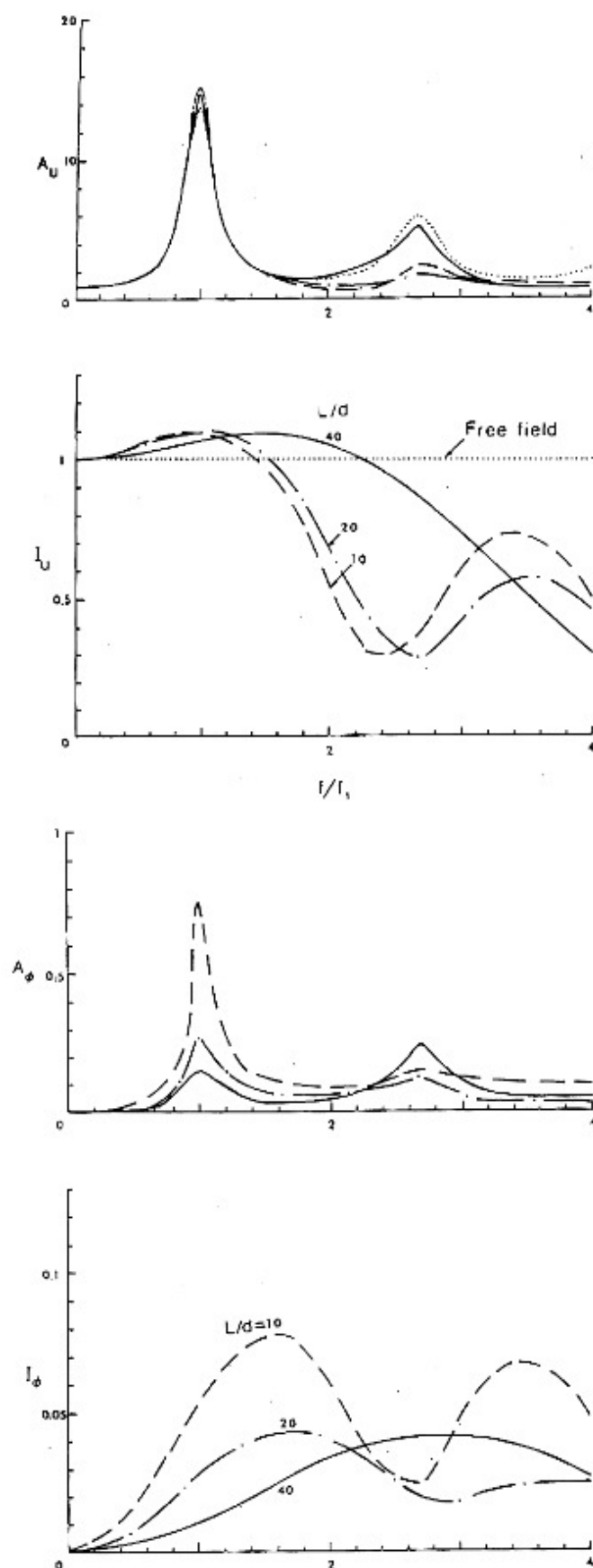


Figura 1.2.15: Influenza di  $L/d$  ( $E_p/E_s = 145000$ ; terreno tipo B;  $\beta_s=0.05$ ,  $\nu_s=0.40$ ,  $\rho_p/\rho_s=1.60$ ) (Gazetas, 1984)

In Figura 1.2.13 è stato rappresentato l'effetto del rapporto  $E_p/E_s$ , dove  $E_p$  è il modulo del palo mentre  $E_s$  è il modulo del terreno alla profondità  $z=d$ . E' possibile notare che la prima frequenza fondamentale del deposito non è influenzata dalla presenza del palo, poiché esso segue il moto *free-field* anche per frequenze di eccitazione prossime a  $1.5 f_i$  e per rapporto  $E_p/E_s$  molto elevato. Inoltre, se il segnale è ad alta frequenza, pali molto flessibili non seguono il moto di *free-field* e sviluppano una elevata componente rotazionale in testa.

Inoltre, in Figura 1.2.14 sono stati rappresentati i fattori cinematici in funzione della frequenza di eccitazione per ciascun tipo di terreno (*tipo A, B o C*). L'azione di filtro operata dal palo si verifica maggiormente per terreni fortemente disomogenei (*tipo A*) e il picco del fattore di rotazione  $I_\phi$  in corrispondenza di  $f=f_i$  incrementa all'aumentare della disomogeneità del terreno.

Infine, in Figura 1.2.15 è stato rappresentato l'effetto della snellezza del palo. La modifica del moto è più accentuata per pali corti, soprattutto per frequenze maggiori di  $1.5 f_1$ .

*Fan et al. (1991)* hanno generalizzato i risultati tramite un parametro  $a_0 = \omega d / v_s$  dove  $d$  è il diametro del palo e  $v_s$  è la velocità di propagazione delle onde di taglio nel terreno. In Figura 1.2.16 è stato rappresentato il parametro  $I_u$  in funzione di  $a_0$ . Come si può osservare per basse frequenze ( $a_0 < a_{01}$ ), quindi per elevate lunghezze d'onda, la testa del palo segue le deformazioni del terreno poiché  $I_u$  è circa uguale a 1. Per valori intermedi delle frequenze ( $a_{01} < a_0 < a_{02}$ ) si verifica una forte riduzione del parametro a causa della crescente incapacità del palo di seguire il terreno. Superato il valore di  $a_{02}$  il parametro rimane pressoché costante oscillando tra 0.2 e 0.4. I valori  $a_{01}$  e  $a_{02}$  dipendono dal profilo del terreno, dalle condizioni di vincolo in testa al palo, dalla rigidezza relativa palo-terreno e dalla geometria del gruppo di pali.

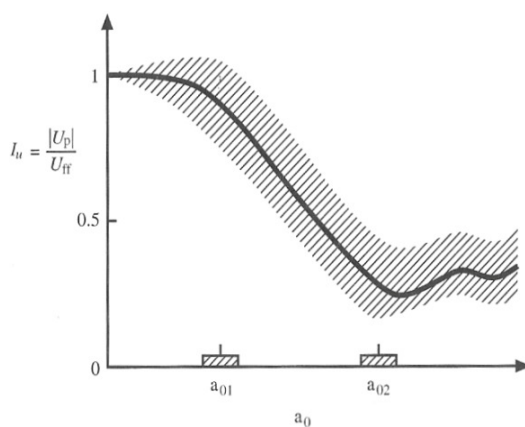


Figura 1.2.16: Andamento del fattore  $I_u$   
(*Fan et al. 1991*)

Kaynia e Kausel (1991) hanno mostrato che la modifica del moto è significativa, sia per pali isolati sia per gruppi di pali, quando il sottosuolo non è omogeneo.

Di Laora (2009) ha studiato la variazione di moto in testa al palo immerso in un sottosuolo stratificato ed ha mostrato che in presenza di forti contrasti di rigidezza (es.  $v_2/v_1 = 6$ ), spessore dello strato superiore modesto (es.  $h_1/d = 2$ ) ed elevata rigidezza relativa palo-terreno, il palo non è in grado di seguire il moto di *free-field* anche a basse frequenze, cosicché le funzioni di amplificazione sono completamente diverse (Figura 1.2.17).

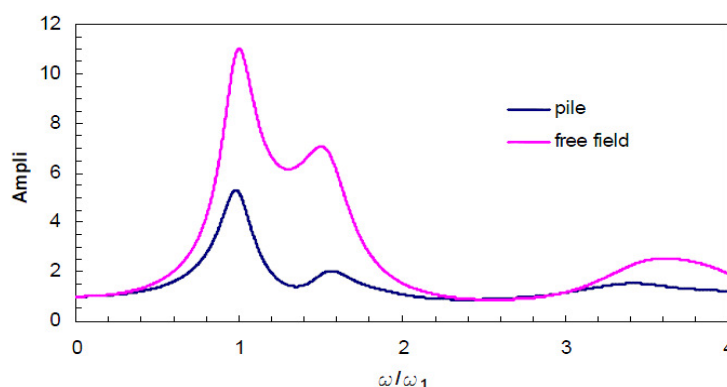


Figura 1.2.17: Funzione di amplificazione del segnale in superficie.  
( $h_1/d = 2$ ;  $d=1\text{m}$ ;  $E_p/E_{s1}=10000$ ;  $v_{s2}/v_{s1} = 6$ ).  
(Di Laora, 2009)

Ai fini progettuali, Di Laora ha sottolineato che tale modifica del moto risulta significativa solo se valgono contemporaneamente le seguenti condizioni:

- $h_1 < L_a$  ;
- $v_{s2}/v_{s1} > 3$  ;
- $E_p/E_{s1} \geq 10000$

Per questa ragione, egli ha suggerito di trascurare tale modifica se il periodo fondamentale della struttura è maggiore di 0.5s poiché adottando le azioni dovute esclusivamente al *free-field* come input per l'analisi dell'interazione inerziale, le sollecitazioni risultano sempre a vantaggio di sicurezza.

### 1.2.3 Aspetti che influenzano l'interazione palo-terreno

In quest'ultimo paragrafo sono stati presi in esame alcuni aspetti che influenzano l'interazione palo-terreno sotto azioni sismiche; in particolare quelli che interessano la valutazione delle sollecitazioni nei pali di fondazione e la risposta dinamica in testa.

Per questa ragione sono stati approfonditi i seguenti temi:

- la profondità del contatto stratigrafico rispetto alla superficie;
- il contenuto in frequenza del input sismico;
- lo smorzamento del materiale;
- la lunghezza di palo immersa nello strato rigido;
- la non linearità geometrica e del materiale.

La quasi totalità di questi aspetti è stata affrontata nella letteratura scientifica facendo riferimento esclusivamente alle sollecitazioni indotte nei pali. Solamente l'effetto della non linearità è stato preso in considerazione anche per studiare la modifica del moto in testa al palo.

### 1.2.3.1 Effetto della profondità del contatto stratigrafico rispetto alla superficie

*Nikolaou et al. (2001)* hanno evidenziato l'importanza del rapporto tra la profondità del contatto stratigrafico e la lunghezza attiva del palo ( $h_1/L_a$ ) nei riguardi delle sollecitazioni indotte nel palo. Se questo rapporto è superiore all'unità, il vincolo alla rotazione imposto alla testa al palo non è percepito in corrispondenza del contatto stratigrafico perciò i due problemi sono completamente disaccoppiati. In questa condizione il momento flettente massimo all'interfaccia tende ad aumentare con ( $h_1/d$ ) (*Di Laora, 2009*). Al contrario, se il rapporto ( $h_1/L_a$ ) è minore dell'unità, esiste una interazione tra la testa e l'interfaccia che modifica le sollecitazioni indotte nel palo. Possono esistere alcune condizioni per le quali il momento flettente si riduce all'aumentare di ( $h_1/d$ ) (*Di Laora, 2009*).

E' da tener presente tuttavia che, aumentando la profondità  $h_1$ , la risposta dinamica del terreno cambia poiché cambiano le sue frequenze fondamentali di risonanza e cambia anche la trasmissibilità della deformazione (così come definita da *Mylonakis (2001)*).

Per quanto riguarda il momento flettente in testa, *Di Laora e Mandolini (2011)* hanno rappresentato i risultati nel campo delle frequenze sotto forma di rapporto tra la curvatura del palo e quella di *free-field* (Figura 1.2.18). Solamente nel caso di rigidità degli strati costante con la profondità, gli Autori hanno mostrato che per sollecitazioni quasi-statiche ( $\omega/\omega_1 \approx 0$ ) e  $h_1 > L_a$ , il rapporto tra le curvature tende all'unità. Se invece, il rapporto ( $h_1/L_a$ ) la curvatura relativa può essere minore o maggiore dell'unità in funzione del valore di  $h_1$ . Per sollecitazioni dinamiche ( $\omega \neq 0$ ), invece, la curvatura relativa si riduce sempre rispetto al caso quasi-statico.

Gli Autori, inoltre, hanno condotto uno studio parametrico su accelerogrammi naturali e hanno mostrato che la curvatura del palo può essere considerata uguale con ragionevole approssimazione a quella del terreno, solo nel caso in cui  $h_1$  è maggiore della lunghezza attiva  $L_a$ . Al contrario, se  $h_1 < L_a$ , l'interazione con l'interfaccia ha un effetto non trascurabile e non può essere considerata più valida tale approssimazione.

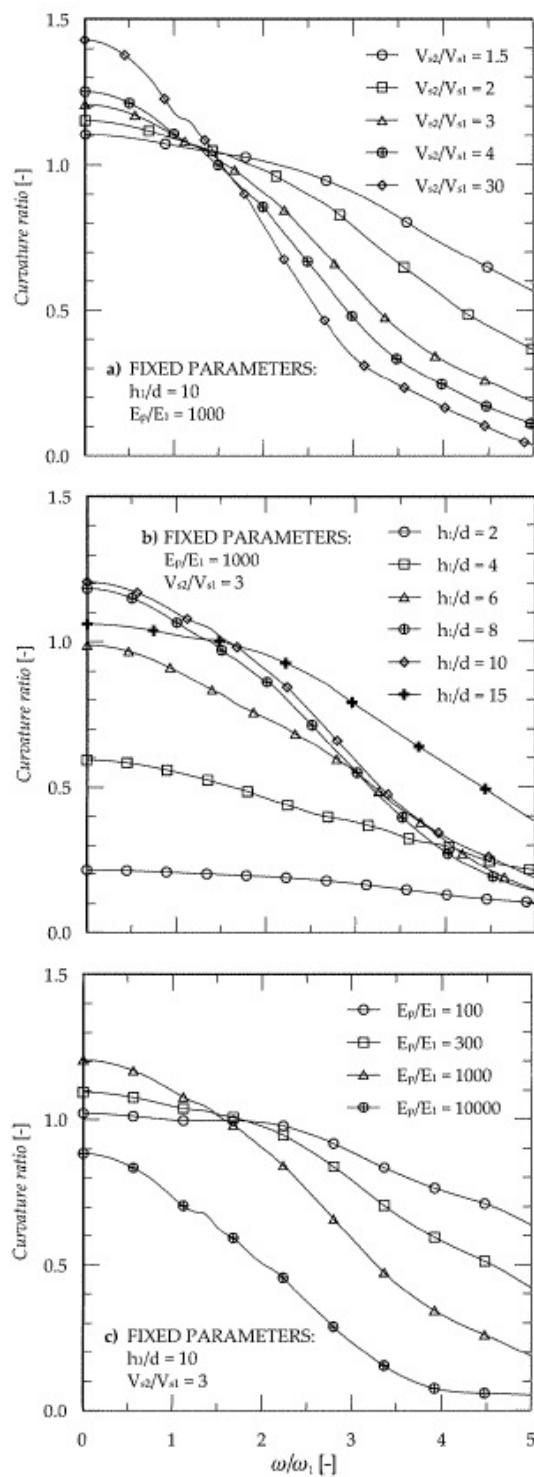


Figura 1.2.18: Influenza della frequenza di eccitazione, variando il contrasto di rigidezza, rapporto di rigidezza palo-terreno, profondità dell'interfaccia ( $d=0.5\text{m}$ ;  $E_1=50\text{MPa}$ ).  
(Di Laora e Mandolini, 2011)



### 1.2.3.2 Effetto del contenuto in frequenza dell'input sismico

In corrispondenza del contatto stratigrafico, l'importanza del contenuto in frequenza del segnale nei riguardi del momento flettente è stato sottolineato da alcuni autori che hanno fatto uso di analisi nel dominio delle frequenze (*Kavvas & Gazetas, 1993; Mylonakis et al., 1997; Nikolaou et al., 2001*). A tal proposito, è stato riscontrato che il momento flettente massimo si verifica quando la pulsazione  $\omega$  del segnale è prossima alla pulsazione fondamentale del deposito  $\omega_1$  (Figura 1.2.8).

Anche altri autori sono pervenuti alle stesse conclusioni, conducendo analisi nel dominio nel tempo con accelerogrammi reali (*Cairo e Dente, 2007; Sica et al., 2007; Sica et al., 2009; Sica et al., 2011*). *Sica et al. (2011)*, in particolare, hanno considerato come frequenza fondamentale dell'accelerogramma sia quella in corrispondenza della quale si ha il massimo dell'ordinata dello spettro di risposta in accelerazione al 5% di smorzamento ( $\omega_p$ ), sia quella ottenuta dalla relazione di *Rathje et al. (1998)* ( $\omega_m$ ). Gli Autori hanno osservato che la possibile risonanza si verifica se  $\omega_1/\omega_m$  (e  $\omega_1/\omega_p$ ) è maggiore di 0.5.

Tuttavia, per alcune combinazioni dei parametri del palo e del terreno è anche possibile che il massimo momento flettente si verifichi in corrispondenza della seconda frequenza fondamentale del deposito (*Kavvas & Gazetas, 1993; Cairo e Dente, 2007*).

### 1.2.3.3 Effetto dello smorzamento del materiale

Se le analisi sono condotte sotto l'ipotesi di elasticità lineare, la risposta dinamica del sistema palo-terreno dipende fortemente dal valore dello smorzamento considerato e quindi esso dovrebbe essere scelto con grande attenzione (*Sica et al., 2009*).

La maggior parte degli studi sono stati condotti ipotizzando un valore costante dello smorzamento del terreno pari al 10% (*Nikolaou et al., 1995; Nikolaou et al., 2001; Mylonakis et al., 1997*) mentre altri hanno utilizzato un valore più contenuto, pari al 5% (*Dezi et al., 2010*).

Lo studio parametrico condotto da *Sica et al. (2011)* con l'approccio BDWF elastico lineare ha mostrato che il valore dello smorzamento modifica in maniera significativa l'entità del momento massimo indotto in corrispondenza dell'interfaccia. Tale effetto è stato quantificato dalla relazione che esprime il rapporto tra il momento massimo ottenuto con uno smorzamento generico  $\xi$  e quello ottenuto quando tale valore è pari a 10%.

$$\frac{M(\xi)}{M(10\%)} = \frac{5}{9} \xi^{-0.25}$$

### 1.2.3.4 Effetto della lunghezza del palo nello strato rigido

L'effetto della lunghezza del palo immersa nello strato rigido inferiore è stato studiato da *Dezi et al. (2009, 2010)*. Lo studio parametrico ha coinvolto pali di differente diametro e lunghezze di infissione variabili da 1D a 5D. Anche se le conclusioni di questo studio parametrico dipendono fortemente dai valori delle rigidezza assunte per lo strato inferiore, i risultati hanno mostrato che l'involuppo dei momenti flettenti lungo il palo per una lunghezza di infissione di 3D è perfettamente coincidente a quello relativo ad una lunghezza di 5D.

### **1.2.3.5      Effetto della non linearità geometrica e del materiale**

Diversi studi sono stati condotti nella letteratura scientifica con la finalità di valutare l'effetto delle non linearità (geometriche o di materiale) nei riguardi dell'interazione dinamica palo-terreno. La maggior parte di questi però hanno riguardato in particolar modo la variazione del moto in testa al palo e non la valutazione delle sollecitazioni negli elementi strutturali (*Nogami et al., 1992; El Naggar e Novak, 1995; Wu e Finn, 1997; Bentley e Naggar, 2000; Maheshwari et al., 2004,2005; Tabghighi e Konagai, 2007*).

*Nogami et al. (1992)* hanno introdotto la non linearità geometrica e del materiale nella analisi usando un sistema discreto di masse, molle e smorzatori. *El Naggar e Novak (1995)* hanno presentato analisi non lineari di gruppi di pali nel dominio del tempo utilizzando l'approccio BDWF.

*Wu e Finn (1997)* hanno presentato un metodo quasi 3D per analisi dinamica non lineare con un modulo e smorzamento dipendenti dalla deformazione. *Bentley e Naggar (2000)* hanno studiato la risposta cinematica di un palo isolato usando il modello di Drucker-Prager senza incrudimento per il terreno e considerando anche il distacco palo-terreno.

Uno studio che ha utilizzato un modello costitutivo con plasticità e incrudimento con la tecnica degli elementi finiti e nel dominio del tempo è stato condotto da *Cai et al. (2000)*, ma il contributo della plasticità sulla risposta del sistema non è stato messo in evidenza.

*Maheshwari et al. (2004)* hanno invece analizzato l'effetto della non linearità (sia geometrica sia di materiale) sulla interazione cinematica palo-terreno. Facendo uso di un modello gerarchico a singola superficie (HiSS), con parametro di incrudimento dipendente dalle deformazioni plastiche volumetriche, essi hanno condotto uno studio parametrico considerato anche il possibile distacco palo-terreno durante l'evento sismico. Gli Autori hanno mostrato che la non linearità del materiale riduce sia la parte reale sia quella immaginaria dell'impedenza del sistema palo-terreno. Il contributo più significativo si verifica maggiormente sulla parte reale e per basse frequenze di eccitazione, mentre per alte frequenze il contributo è trascurabile. L'effetto della separazione palo-terreno (non-linearità geometrica) è più importante quando il modello del terreno è puramente elastico, poiché riduce la rigidità complessiva del sistema. Se il materiale è elasto-plastico, invece, il distacco tra palo e terreno incrementa solo lo smorzamento lasciando invariata la rigidità globale. Le analisi, tuttavia, sono state condotte nel dominio delle frequenze e con un'ampiezza unitaria della sollecitazione perciò i risultati sono relativi a questa condizione e non generalizzabili, proprio a causa della non linearità del problema.

*Sica et al. (2009)* hanno valutato l'effetto della non linearità del comportamento meccanico del terreno

sul momento flettente nel palo con uno studio parametrico, facendo uso della “linearità equivalente”. Le leggi di decadimento del modulo e dello smorzamento con la deformazione distorsiva  $\gamma$  sono state dedotte da letteratura per lo strato superiore (*Vucetic & Dobry, 1991* –  $I_p=30-50-200\%$ ) e per lo strato inferiore ( $I_p=0\%$ ) mentre lo smorzamento iniziale è stato assunto pari a 2% per entrambi gli strati. Gli Autori, confrontando i risultati ottenuti da analisi elastiche lineari con quelli relativi alla linearità equivalente, hanno mostrato che l'effetto della non linearità del terreno non è univoco. Per alcune storie temporali è stata osservata una riduzione dei momenti lungo il fusto mentre per altre un brusco aumento, specialmente in corrispondenza dell'interfaccia tra i due strati di terreno. Questo effetto è dovuto principalmente all'incremento locale di contrasto di rigidezza “equivalente” rispetto al contrasto di rigidezza iniziale. L'incremento di smorzamento che si verifica contestualmente non è sufficiente a compensare l'effetto dell'aumento del contrasto di rigidezza. Inoltre la non linearità riduce anche la frequenza fondamentale del sistema rispetto al caso elastico in misura maggiore quanto minore è l'indice di plasticità del materiale. Infine, l'effetto della non linearità risulta meno importante per sollecitazioni che agiscono in testa al palo rispetto a quelle in corrispondenza della sezione di interfaccia.

## Capitolo 2

# **MODELLI COSTITUTIVI AVANZATI**

## 2.1 INTRODUZIONE

L'esecuzione di analisi numeriche avanzate richiede l'impiego di equazioni costitutive per il terreno capaci di descrivere gli aspetti essenziali del suo comportamento meccanico in condizioni di carico ciclico e dinamico.

Le evidenze sperimentali mostrano che le caratteristiche della risposta ciclica/dinamica dei terreni presentano le seguenti caratteristiche peculiari: l'irreversibilità e la non linearità incrementale, il comportamento isteretico e la dipendenza dalla storia tensionale.

I modelli basati sulla teoria della plasticità classica, perfetta o incrudente, sono in grado di riprodurre con sufficiente accuratezza i fenomeni di non linearità e irreversibilità in condizioni di carico monotono. Sono assolutamente insufficienti invece nel descrivere l'accumulo di deformazioni irreversibili causate da sollecitazioni cicliche ed hanno una modesta capacità di tenere in conto gli effetti della storia tensionale.

Questi modelli infatti sono costituiti da un dominio elastico di elevate dimensioni, all'interno del quale la risposta del materiale è puramente reversibile. Per questa ragione, solamente a partire da stati posti in corrispondenza della superficie di snervamento è possibile accumulare deformazioni plastiche irreversibili. Sebbene questa caratteristica possa essere ritenuta poco influente in alcuni casi nella simulazione di percorsi di carico monotoni, essa risulta estremamente inadeguata nella descrizione di percorsi di carico ciclico.

Nell'ultimo ventennio è stata generalizzata la teoria della plasticità classica, proponendo così numerosi modelli che consentono di simulare correttamente la risposta del terreno in condizioni di carico tipiche degli eventi sismici. Uno di tali approcci è la teoria della plasticità con incrudimento cinematico.

## 2.2 IL MODELLO PB PER LE SABBIE

Un modello adottato per descrivere il comportamento meccanico dei terreni a grana grossa è stato sviluppato da *Papadimitrou & Bouckovalas* e per questa ragione chiamato nella tesi PB. La versione iniziale, del 2001, è stata formulata per simulare risultati di prove di laboratorio, mentre quella successiva del 2002 ha costituito l'estensione a percorsi di carico generici.

Entrambe le versioni delle equazioni costitutive sono state sviluppate nell'ambito della Meccanica dello Stato Critico (CSSM, *Schofield & Wroth, 1968*), introducendo però in questo contesto due modifiche sostanziali che consentono di simulare correttamente l'effetto dello stato iniziale di addensamento della sabbia.

Come già discusso in *Manzari & Dafalias (1997)*:

- le linee di normalconsolidazione non sono univoche e non sono imposte dall'utente ma sono ricavate a partire da equazioni costitutive e mostrano una pendenza che è funzione delle condizioni iniziali del materiale;
- il comportamento a taglio del materiale è relazionato direttamente ad un parametro di stato aggiuntivo  $\Psi$ , stabilito in relazione alla linea di stato critico (CSL) (unica per un assegnato materiale).

Per quanto riguarda la possibilità di simulare correttamente il comportamento in condizioni cicliche, nell'ambito della teoria della plasticità è stato introdotto l'incrudimento cinematico ed è stata modificata la legge di flusso. In questa maniera è stato possibile simulare, almeno qualitativamente, alcuni aspetti della risposta del materiale al crescere del numero di cicli di sollecitazione, quali: il decadimento della rigidità, lo smorzamento e l'accumulo di deformazioni plastiche.

A differenza del modello di *Manzari & Dafalias (1997)*, sono state introdotte le seguenti modifiche:

- all'interno della zona “elastica” è stato introdotto un comportamento isteretico (di tipo Ramberg – Osgood) al posto del legame elastico “lineare” tradizionalmente impiegato;
- una variabile (*sand fabric*) che tiene in conto a livello macroscopico l'effetto della orientazione dei piani di contatto tra le particelle e che evolve durante le sollecitazioni.

## 2.2.1 Struttura del modello

### 2.2.1.1 Concetti di base ed equazioni – caso Triassiale

Il modello elastoplastico è stato sviluppato nell'ambito della teoria della plasticità con incrudimento cinematico ed è stato formulato in termini di tensioni efficaci, secondi i principi della Teoria dello Stato Critico.

La superficie dello stato critico è unica, indipendente dal percorso tensionale, dalle condizioni di drenaggio e dalla modalità di preparazione del provino. La proiezione di questa superficie sul piano  $e$ - $\ln(p')$  è una retta di equazione:

$$e_{cs} = (e_{cs})_a - \lambda \ln\left(\frac{p'}{p_a}\right) \quad (2.2.1)$$

con  $\lambda$  e  $(e_{cs})_a$  rispettivamente la pendenza della linea di stato critico e l'indice dei vuoti in corrispondenza della pressione atmosferica ( $p_a$ ).

Il parametro di stato  $\psi$ , introdotto da *Been e Jeffries (1985)* è dato da:

$$\psi = e - e_{cs} = e - (e_{cs})_a + \lambda \ln\left(\frac{p'}{p_a}\right) \quad (2.2.2)$$

Nel piano triassiale, la funzione di snervamento  $f$  è data da:

$$f = \eta - \alpha \pm m \quad (2.2.3)$$

$$\eta = \frac{q}{p}$$

Il parametro  $m$  rappresenta l'apertura della superficie di plasticizzazione  $f$ , mentre  $\alpha$  è la variabile cinematica che descrive la posizione del centro.

Il modello incorpora tre superfici, definite nel piano triassiale da i parametri  $M_{c,e}^{c,b,d}$  (Figura 2.2.1):

- superficie di stato critico (CSS);
- superficie di bordo (BS);
- superficie di dilatanza (DS).



A seguito dei lavori di *Manzari & Dafalias (1997)* e *Wood (1994)*, il modello descrive i parametri di “bordo” e di “dilatanza” con le seguenti relazioni (Figura 2.2.1):

$$M_{c,e}^b = M_{c,e}^c + k_{c,e}^b \langle -\psi \rangle \quad (2.2.4)$$

$$M_{c,e}^d = M_{c,e}^c + k_{c,e}^d \psi \quad (2.2.5)$$

Per le applicazioni pratiche è possibile assumere valida la relazione  $k_e^{b,d} = \frac{M_e^c}{M_c^c} k_c^{b,d}$  (essa può essere anche omessa con l'inconveniente di avere altri due parametri  $k_e^b$  e  $k_e^d$ ).

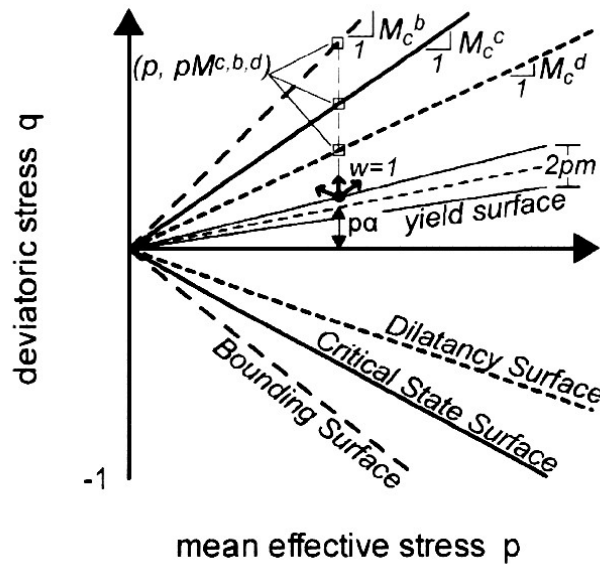


Figura 2.2.1: le superfici nel modello nel piano q-p'

Per qualsiasi percorso in compressione imposto allo stato tensionale  $(p', \eta p')$  (in Figura 2.2.1 e Figura 2.2.2), i punti immagine corrispondenti su ciascuna delle tre superfici hanno le coordinate  $(p', M_c^{b,c,d} p')$ . La stessa cosa vale per i percorsi di carico in estensione per i quali i punti immagine hanno le coordinate  $(p', M_e^{b,c,d} p')$ .

Assunta questa regola di proiezione, la “distanza” scalare tra lo stato corrente e le tre superfici è data dalla relazione:

$$d_{e,c}^{b,c,d} = w(M_{e,c}^{b,c,d} - \eta) \quad (2.2.6)$$

$w = \pm 1$  (compressione (+) ed estensione (-));



dove gli incrementi di deformazione e di tensione sono rispettivamente  $\underline{\dot{\epsilon}} = \dot{\epsilon}_v \underline{\delta} + \underline{\dot{e}}$  e  $\underline{\dot{\sigma}} = \dot{\sigma}_v \underline{\delta} + \underline{\dot{s}}$ .

Le relazioni scritte in precedenza possono essere espresse anche in funzione degli invarianti di tensione e di deformazione, nella forma:

$$\dot{p} = K_t \dot{\epsilon}_v^e \quad (2.2.11)$$

$$\dot{q} = 3 G_t \dot{\epsilon}_s^e \quad (2.2.12)$$

dove  $p$  e  $q$  sono rispettivamente l'invariante di tensione media e il deviatore di tensione, mentre  $\epsilon_v^e$  e  $\epsilon_s^e$  sono rispettivamente l'invariante di deformazione volumetrica elastica e l'invariante di deformazione distorsiva elastica.

L'incremento di deformazione plastica è ricavato dalla relazione:

$$\underline{\epsilon}^p = \langle \lambda \rangle \underline{R} \quad (2.2.13)$$

$\lambda$  è il moltiplicatore plastico mentre  $\underline{R}$  è un tensore del secondo ordine che definisce la direzione dell'incremento di deformazione plastica.

### 2.2.1.2 Superfici del modello nello spazio multiassiale

Tutte le superfici del modello possono essere definite univocamente in termini del tensore del rapporto di tensione deviatorica  $\underline{r} := \underline{s} / p'$ , dove  $p'$  è la pressione efficace media.

La superficie di snervamento  $f$  è rappresentata da un cono con vertice nell'origine degli assi, centrato in  $\underline{\alpha}$  e di raggio  $\sqrt{2/3} m$ . L'espressione è la seguente:

$$f = \sqrt{(\underline{s} - p' \underline{\alpha}) : (\underline{s} - p' \underline{\alpha})} - \sqrt{\frac{2}{3}} m p = 0 \quad (2.2.14)$$

La normale  $\underline{L}$  alla superficie di snervamento ha la seguente espressione:

$$\underline{L} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\alpha}} = \underline{n} - V/3 \underline{I} \quad (2.2.15)$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{r} - \underline{\alpha}}{\sqrt{2/3} m}, \text{ tensore unitario } (\underline{n} : \underline{n} = 1); \quad (2.2.16)$$

$$V = \underline{\alpha} : \underline{n} + \sqrt{2/3} m \quad (2.2.17)$$

$$\underline{r} := \underline{s} / p' \quad (2.2.18)$$

$\underline{I}$  è il tensore identità.

La superficie di snervamento nel piano deviatorico assume la forma di una circonferenza e non ha quindi alcuna dipendenza da  $\theta$  (Figura 2.2.3). Le altre tre superfici, invece, sono rappresentate sempre da coni con vertice nell'origine degli assi ma la loro forma nel piano deviatorico non è circolare ma dipende dal parametro  $\theta$  (Figura 2.2.3).

L'angolo di Lode  $\theta$  è definito come l'angolo di inclinazione del tensore  $\underline{\bar{r}} = \underline{r} - \underline{\alpha}$  rispetto all'asse  $r_I$ . Se lo stato tensionale  $\underline{r}$  giace sulla superficie di snervamento, l'angolo di Lode  $\theta$  rappresenta l'inclinazione della normale  $\underline{n}$  rispetto alla all'asse  $r_I$ .

$$\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{J}_3}{\sqrt{\bar{J}_2^3}} \quad (2.2.19)$$

$$\bar{J}_3 = 1/3 \underline{\bar{r}} : \underline{\bar{r}} : \underline{\bar{r}} \quad (2.2.20)$$

$$\bar{J}_2 = 1/2 \underline{\bar{r}} : \underline{\bar{r}} \quad (2.2.21)$$

I punti immagine di  $\underline{\alpha}$  sulle tre superfici sono rappresentati dalla relazione (Figura 2.2.3):

$$\underline{\alpha}^{b,c,d} = \alpha_0^{b,c,d} \underline{n} \sqrt{2/3} \quad (2.2.22)$$

$$\alpha_0^{b,c,d} = g(\theta, c) \% M_c^{b,c,d} - m \quad (2.2.23)$$

con  $g(\theta, c)$  fattore compreso tra 0 e 1 che descrive la superficie nel piano deviatorico e  $M_c^{b,c,d}$  il valore di  $M$  di ciascuna delle tre superfici per percorsi di carico in compressione.

Gli Autori hanno utilizzato per il modello PB una formulazione della funzione  $g(\theta, c)$  derivata da *Argyris et al. (1974)* mentre nel lavoro di implementazione, descritto nel capitolo successivo, è stato scelto di utilizzare un'analogia formulazione, proposta da *van Eekelen (1980)*, già efficacemente impiegata nell'implementazione di modelli elastoplastici.

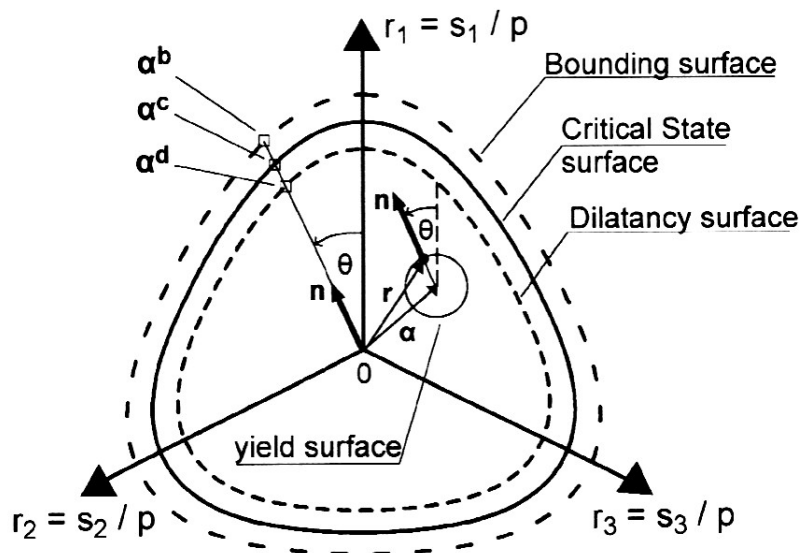


Figura 2.2.3: Superfici del modello nello spazio multiassiale.

### 2.2.1.3 Calcolo delle deformazioni (para)elastiche

Per percorsi tensionali che sono contenuti interamente nella superficie di snervamento, la legge di corrispondenza in forma incrementale tra le tensioni e le deformazioni può essere scritta:

$$\dot{p}' = K_t \dot{\epsilon}_v \quad (2.2.24)$$

$$\dot{\underline{s}} = 2 G_t \dot{\underline{e}} \quad (2.2.25)$$

dove  $\underline{s}$  ed  $\underline{e}$  rappresentano la parte deviatorica rispettivamente del tensore della tensione e della deformazione.

Il rapporto tra rigidità volumetrica e a taglio è espressa tramite il coefficiente di Poisson  $\nu$ , valido sotto l'ipotesi di comportamento isotropo:

$$\frac{K_t}{G_t} = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \quad (2.2.26)$$

Per il modulo di taglio è assunta una legge di decadimento per la quale  $G_t$  decresce gradualmente dal valore massimo  $G_{max}$  fino a quello espresso dalla relazione:

$$G_t = \frac{G_{max}}{T} \quad \text{con} \quad G_{max} = \frac{B p_a}{0.3 + 0.7 e^2} \sqrt{\frac{p'}{p_a}} \quad (2.2.27)$$

Il parametro scalare  $T$  è funzione della differenza tra lo stato tensionale corrente, rappresentato dal tensore  $\underline{s}$ , rispetto al valore di riferimento rappresentato da  $\underline{s}^{ref}$ :

$$X_r^{ref} = \sqrt{1/2 (\underline{s} - \underline{s}^{ref}) : (\underline{s} - \underline{s}^{ref})} \quad (2.2.28)$$

Il modello distingue due stati di riferimento:

- 1) stato di consolidazione per la prima sollecitazione di taglio in cui  $\underline{s}^{ref} = \underline{s}^0$  e  $X_r^{ref} = X_r^0$ ;
- 2) l'ultimo punto prima della inversione della sollecitazione di taglio (*shear reversal*, SR) in cui  $\underline{s}^{ref} = \underline{s}^{SR}$  e  $X_r^{ref} = X_r^{SR}$ .

Le espressioni per il parametro  $T$  sono le seguenti:

$$\bullet \quad T = 1 + k \left( \frac{1}{a_1} - 1 \right) \left( \frac{X_r^0}{\eta_1} \right)^{k-1} \quad \text{nella condizione di primo carico;} \quad (2.2.29)$$

$$\bullet \quad T = 1 + k \left( \frac{1}{a_1} - 1 \right) \left( \frac{X_r^{SR}}{2\eta_1} \right)^{k-1} \quad \text{dopo l'inversione di taglio SR} \quad (2.2.30)$$

$$\text{con il limite di } T \leq 1 + k \left( \frac{1}{a_1} - 1 \right) \quad \text{e } k = 2.$$

Il legame è para-elastico, nel senso che per cicli di carico contenuti all'interno della superficie di snervamento, si producono piccole e irreversibili deformazioni in contrasto con la definizione di legame elastico. Tuttavia, queste deformazioni irreversibili sono di modesta entità poiché il parametro  $m$  di apertura del cono è molto piccolo.

Rappresentando in un grafico (Figura 2.2.4) i risultati di una prova di taglio semplice a pressione efficace media costante ( $p' = \text{cost}$ ) su un grafico che ha sulle ascisse  $\gamma = 3\epsilon_s$  e sulle ordinate  $\eta = q/p'$ , è possibile mostrare il significato dei parametri  $\eta_1$  e  $\gamma_1$ .

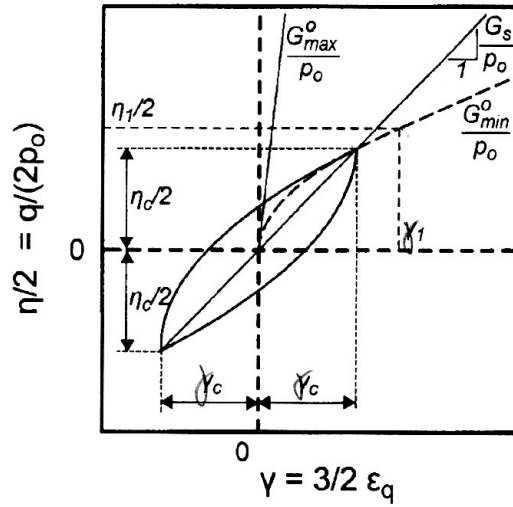


Figura 2.2.4: Risposta del modello per cicli con  $\eta = q/p' < \eta_1$ . Prova a  $p' = \text{cost}$ .

In questo caso il parametro di riferimento assume la forma:  $X_r^{ref} = |\eta_c - \eta^{SR}|$ . A questo punto, assumendo che la curva di primo carico sia passante per l'origine  $\eta^{SR} = 0$ , il modulo elastico tangente raggiunge il suo valore minimo  $G_{\min}$  solamente se  $\eta_c = \eta_1$ .

$$G_t = \frac{G_{max}}{1 + 2 \left( \frac{1}{a_1} - 1 \right) \left( \frac{\eta_c}{\eta_1} \right)} \quad (2.2.31)$$

Ottenendo l'espressione del modulo secante  $G_s$  a partire da quello tangente  $G_t$  e imponendo una ampiezza del ciclo pari a  $\eta_c = \eta_1$ , si ha che  $G_s / G_{max} = a_1$ .

Nel caso in cui  $p'_o = cost$ , la relazione tra  $\eta_1$  e  $\gamma_1$  può essere espressa come segue:

$$\eta_1 = \frac{G_s}{p_o'} \gamma_1 = \frac{G_s}{G_{max}} \frac{G_{max}}{p_o'} \gamma_1 = a_1 \frac{G_{max}}{p_o'} \gamma_1 \quad (2.2.32)$$

$\gamma_1$  quindi può essere interpretata come la soglia di deformazione oltre la quale ogni ulteriore degradazione della rigidità al taglio è dovuta allo sviluppo di deformazioni plastiche e per questa ragione  $\gamma_1$  può essere fisicamente associata a  $\gamma_{tv}$ .

Questo ragionamento si può estendere anche al caso più generale di percorso di carico che non sia a  $p' = cost$ . La relazione tra  $\gamma_1$  e  $\eta_1$  quindi è:

$$\eta_1 = a_1 \frac{G_{max}^{SR}}{p_{SR}'} \gamma_1 \quad (2.2.33)$$

dove  $G_{max}^{SR}$  e  $p_{SR}'$  sono il modulo di taglio massimo e la pressione efficace media all'ultimo SR.



### 2.2.1.4 Deformazioni plastiche e incrudimento cinematico

La direzione del tensore deformazioni plastiche è data da:

$$\underline{R} = \underline{n} + D/3 \underline{I} \quad (2.2.34)$$

- nel piano deviatorico la legge di flusso è associata poiché  $\underline{R}$  e  $\underline{L}$  sono diretti come  $\underline{g}$ ;
- nello spazio delle tensioni la legge di flusso non è associata poiché in generale  $\underline{V} \neq \underline{D}$ .

$D$  è dato dalla relazione espressa in *Manzari & Dafalias (1997)*:

$$D = A_0 d^d \quad (2.2.35)$$

con  $A_0 (> 0)$  parametro del modello e  $d^d$  la distanza scalare dalla superficie di dilatanza espressa dalla relazione:

$$d^d = (\underline{\alpha}^d - \underline{\alpha}) : \underline{n} \quad (2.2.36)$$

Quando si oltrepassa tale superficie,  $d^d$  diventa negativo e il materiale dilata ( $D < 0$ ). Tuttavia, per assicurare che non ci sia dilatanza nel caso in cui  $\psi > 0$  e  $d^d < 0$  si impone  $D = 0$ .

In accordo a *Manzari & Dafalias (1997)*, le leggi di incrudimento hanno la forma:

- a)  $\dot{\underline{\alpha}} = \dot{\lambda} \underline{\bar{\alpha}}$  per la parte cinematica;
- b)  $\dot{\underline{m}} = \dot{\lambda} \underline{\bar{m}}$  per la parte isotropa.

E' stato tuttavia ipotizzato che:

- a) l'incrudimento isotropo sia nullo e quindi  $\underline{\bar{m}} = 0$  ;
- b)  $\dot{\underline{\alpha}}$  sia diretto verso la  $\underline{\alpha}_0^b$  secondo la relazione  $\dot{\underline{\alpha}} = \langle \dot{\lambda} \rangle h_f h_b \underline{d}^b$  ,

dove la distanza  $\underline{d}^b$  vale  $\underline{d}^b = \underline{\alpha}_0^b - \underline{\alpha}$  ,  $h_f$  è un coefficiente che tiene in conto l'evoluzione della tessitura (*sand fabric*),  $h_b$  è un coefficiente positivo che è legato alla grandezza  $|\underline{d}^b : \underline{n}|$  che rappresenta la proiezione del tensore  $\underline{d}^b$  lungo la direzione  $\underline{n}$  e ha la seguente espressione

$$h_b = h_0 \frac{|\underline{d}^b|}{\langle \underline{d}_{ref}^b - |\underline{d}^b| \rangle} \quad (2.2.37)$$



### 2.2.1.5 Effetto dell'evoluzione della struttura durante i cicli

Lo scalare  $h_f$  che descrive l'evoluzione della tessitura è rappresentato dalla seguente espressione:

$$h_f = \frac{1 + \langle \underline{E} : \underline{\delta} \rangle^2}{1 + \langle \underline{E} : \underline{n} \rangle} \quad (2.2.43)$$

$\underline{E}$  è il tensore di tessitura (del 2° ordine) che può essere decomposto in una parte isotropa e in una deviatorica come segue:

$$\underline{E} = \underline{f} + \frac{f_p}{3} \underline{\delta} \quad \text{con} \quad f_p = tr(\underline{E}) \quad (2.2.44)$$

Sostituendo nell'espressione precedente si ottiene:

$$h_f = \frac{1 + \langle f_p \rangle^2}{1 + \langle \underline{f} : \underline{n} \rangle} \quad (2.2.45)$$

Le leggi di incrudimento del tensore di tessitura dipendono linearmente dall'incremento di deformazioni volumetriche plastiche e hanno la forma:

- $\dot{f}_p = H \dot{\epsilon}_p^p$  ;
- $\dot{\underline{f}} = -H \langle -\dot{\epsilon}_p^p \rangle [C \underline{n} + \underline{f}]$  ;

$$\text{con } C = \max |f_p|^2 \quad \text{e} \quad H = H_0 \left( \frac{\sigma_{10}}{p_a} \right)^{-\xi} \langle -\psi_0 \rangle .$$

Da queste relazioni segue che i terreni addensati (  $\psi_0 < 0$  ) e con bassa tensione principale massima  $\sigma_{10}$  , risentono molto dell'effetto della tessitura.

In Figura 2.2.5 è stato rappresentato sia il percorso in tensioni efficaci di una prova ciclica nel piano degli invarianti sia il corrispondente valore del coefficiente di struttura. Per comprendere la relazione che fornisce il coefficiente  $h_f$  è opportuno analizzare il contributo sia del numeratore sia del denominatore durante la prova.

- NUMERATORE: incrementa indefinitamente per stati tensionali che si trovano sotto la PTL (rappresentabile dalla superficie di dilatanza  $[M^d]$  ) (da 1-4) poiché l'incremento di

deformazioni volumetriche plastiche è positivo ( $\dot{\epsilon}_p^v > 0$ ) ; decrementa invece per percorsi tensionali che si trovano sopra la PTL (da 4-5) quando  $\dot{\epsilon}_p^v < 0$  . Le parentesi di *Macauley* assicurano che il numeratore sia sempre maggiore dell'unità.

- DENOMINATORE: non segue l'intera storia di carico poiché, per esempio, per percorsi tensionali che non superano la PTL ( $\dot{\epsilon}_p^v < 0$ ) il tensore  $\underline{f} = 0$  e il denominatore rimane uguale a 1. Quando il percorso di carico continua oltre la PTL (4-5) il tensore  $\underline{f}$  si modifica. Durante questo percorso il prodotto  $\langle \underline{f} : \underline{n} \rangle$  si annulla poiché  $\underline{f}$  è in verso opposto a  $\underline{n}$  . Solo in corrispondenza del SR il denominatore diventa maggiore dell'unità.

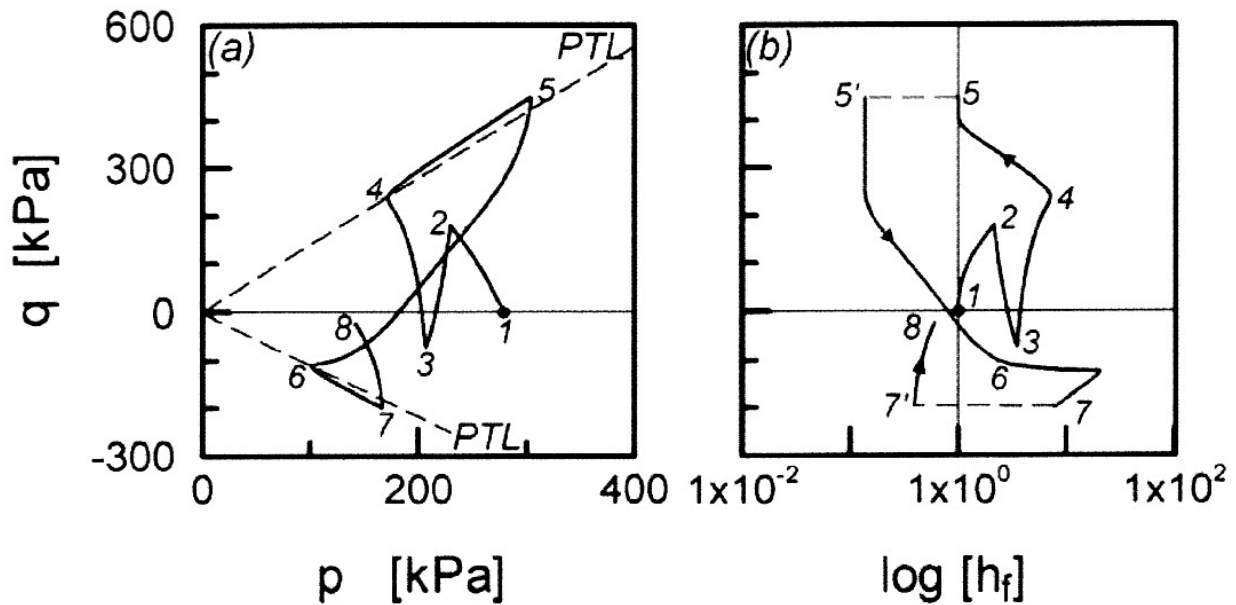


Figura 2.2.5: Simulazione di una prova triassiale non drenata ciclica. (a) percorso in tensioni efficaci – (b) evoluzione del parametro  $h_f$  durante la prova.

## 2.2.2 Parametri del modello e loro calibrazione

### RICAVATI DALLE PROVE DI LABORATORIO

1.  $e_{cs}$  parametro di stato critico;
2.  $\lambda$  parametro di stato critico;
3.  $M_c^c$  parametro di stato critico;
4.  $B$  per ricavare  $G_{\max}$ ;
5.  $a_1$  parametro per Ramberg – Osgood;
6.  $\gamma_1$  parametro per Ramberg – Osgood;
7.  $m$  ampiezza del cono elastico;
8.  $\nu$  coefficiente di Poisson;
9.  $k_c^b$  parametro della superficie di bordo;
10.  $k_c^d$  parametro della superficie di dilatanza;
11.  $A_0$  costante per determinare la dilatanza  $D$ ;

### RICAVATI DAL BEST FITTING CON PROCEDURA TENTATIVO E VERIFICA

12.  $h_0$  costante per ricavare  $h_b$ ;
13.  $H_0$  costante per ricavare l'indice di struttura;
14.  $\zeta$  effetto della tensione principale massima sull'indice di struttura.

METODOLOGIA:

Parametro 1, 2 e 3: test monotoni che arrivino allo stato critico;

Parametro 4: test a piccole deformazioni (RC o bender element...);

Parametro 5 e 6: dal grafico  $G/G_{\max}$  in funzione di  $\gamma$  ottenuto con prove in colonna risonante. Si individua il valore della deformazione distorsiva in corrispondenza della quale si sviluppano deformazioni volumetriche plastiche  $\gamma_v$ . Il valore di  $\gamma_1 = \gamma_v$  e  $a_1 = G/G_{\max}(\gamma = \gamma_1)$ .

Parametro 7:  $m = 0.05 M_c^c$  ;

Parametro 8: con prove Cross-hole si ricava il rapporto tra  $K_t$  e  $G_t$ ;

Parametro 9 e 10: test monotoni. Si rappresentano i valori in grafici che hanno in ascisse  $\psi_0$  e in ordinate  $\eta_{picco}$  o  $\eta_{dil}$  a seconda del parametro. La pendenza della retta di inviluppo è il parametro desiderato.

Parametro 11: in prove triassiali (TX), in particolare dal grafico che mette in relazione la deformazione distorsiva e la deformazione volumetrica.

I parametri 12, 13 e 14 sono ricavati a tentativo calibrando la risposta della simulazione ottenuta con i risultati di prove sperimentali.

## 2.3 IL MODELLO DM PER LE SABBIE

Il modello di *Dafalias & Manzari (2004)* ha origine dalla versione del 1997 del modello di *Manzari&Dafalias*. Essa infatti aveva introdotto alcuni concetti che consentono di descrivere con sufficiente approssimazione il comportamento monotono e ciclico di sabbie dense e sciolte:

- le linee di normalconsolidazione non sono univoche e non sono imposte dall'utente ma sono ricavate a partire da equazioni costitutive e mostrano una pendenza che è funzione delle condizioni iniziali del materiale;
- il comportamento a taglio del materiale è relazionato direttamente ad un parametro di stato aggiuntivo  $\Psi$ , stabilito in relazione alla linea di stato critico (CSL) (unica per un assegnato materiale, indipendente dal percorso tensionale, dalle condizioni di drenaggio e dalla modalità di preparazione del provino).

Nel modello di *Dafalias & Manzari (2004)* (chiamato nel seguito DM) sono stati introdotti ulteriori miglioramenti:

- la linea dello stato critico è una relazione di potenza invece della espressione semilogaritmica;
- impiego di una tensore di tessitura, che ha un effetto importante sul comportamento del materiale sottoposto a percorsi tensionali di scarico;
- la legge di flusso è completamente non-associata, anche nel piano deviatorico e la dilatanza del materiale è funzione anche della tessitura.

### 2.3.1 Struttura del modello

#### 2.3.1.1 Stato critico

La relazione tra l'indice di vuoti e pressione efficace media è una legge di potenza al posto della classica relazione lineare nel piano semi-logaritmico.

$$e_c = e_{c,s} - \lambda_c \left( \frac{p'}{p_a} \right)^{\xi} \quad (2.3.1)$$

#### 2.3.1.2 Elasticità

I moduli elastici  $G$  e  $K$  sono:

$$G = p_a G_0 \frac{(2.97 - e)^2}{1 + e} \left( \frac{p'}{p_a} \right)^{0.5} \quad (2.3.2)$$

$$K = \frac{2(1 - \nu)}{3(1 - 2\nu)} G \quad (2.3.3)$$

La componente elastica della deformazione è ricavata con le relazioni:

$$\dot{p}' = K_t \dot{\epsilon}_v \quad (2.3.4)$$

$$\dot{\underline{s}} = 2 G_t \dot{\underline{e}} \quad (2.3.5)$$

#### 2.3.1.3 Funzione di plasticizzazione

La superficie di snervamento  $f$  è rappresentata da un cono con vertice nell'origine degli assi, centrato in  $\underline{\alpha}$  e di raggio  $\sqrt{2/3} m$ . L'espressione è la seguente:

$$f = \sqrt{(\underline{s} - p \underline{\alpha}) : (\underline{s} - p \underline{\alpha})} - \sqrt{\frac{2}{3}} m p = 0 \quad (2.3.6)$$

La normale  $\underline{L}$  alla superficie di snervamento ha la seguente espressione:

$$\underline{L} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\alpha}} = \underline{n} - V/3 \underline{I} = \underline{n} - \frac{\underline{n} : \underline{s}}{3} \underline{I} \quad (2.3.7)$$



$$\underline{n} = \frac{\underline{r} - \underline{\alpha}}{\|\underline{r} - \underline{\alpha}\|}, \text{ tensore unitario } (\underline{n} : \underline{n} = 1);$$

$\underline{I}$  è il tensore identità.

La superficie di snervamento nel piano deviatorico assume la forma di una circonferenza e non ha quindi alcuna dipendenza dall'angolo di Lode  $\theta$ . Esso è comunque definito come l'angolo di inclinazione del tensore  $\bar{\underline{r}} = \underline{r} - \underline{\alpha}$  rispetto all'asse  $\underline{r}_1$  (Figura 2.3.1). Se lo stato tensionale  $\underline{r}$  giace sulla superficie di snervamento, l'angolo di Lode  $\theta$  rappresenta l'inclinazione della normale  $\underline{n}$  rispetto alla all'asse  $\underline{r}_1$ .

$$\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{J}_3}{\sqrt{\bar{J}_2^3}} = \sqrt{6} \text{tr} \underline{n}^3 \quad (2.3.8)$$

$$\bar{J}_3 = 1/3 \bar{\underline{r}} : \bar{\underline{r}} : \bar{\underline{r}} \quad (2.3.9)$$

$$\bar{J}_2 = 1/2 \bar{\underline{r}} : \bar{\underline{r}} \quad (2.3.10)$$

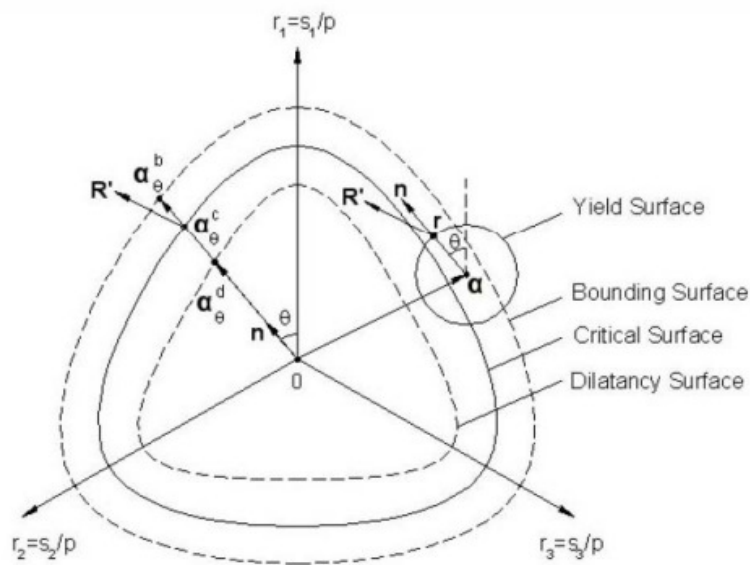


Figura 2.3.1: Le tre superfici (dilatanza, stato critico e bordo) nel piano deviatorico e l'incremento di deformazioni plastiche  $\underline{R}'$ .

I punti immagine di  $\underline{\alpha}$  (“back stress”) sulle tre superfici (Figura 2.3.1) sono rappresentati dalla relazione:

$$\underline{\alpha}^{b,c,d} = \alpha_0^{b,c,d} \underline{n} \sqrt{2/3} \quad (2.3.11)$$

$$\alpha_0^{b,c,d} = g(\theta, c) M_c^{b,c,d} - m \quad (2.3.12)$$

$g(\theta, c)$  è un fattore compreso tra 0 e 1 che descrive la superficie nel piano deviatorico. Come per il modello PB, gli Autori hanno utilizzato una formulazione della funzione  $g(\theta, c)$  derivata da *Argyris et al. (1974)* mentre nel lavoro di implementazione, descritto nel capitolo successivo, si è scelto di utilizzare un'analogia formulazione, proposta da *van Eekelen (1980)*, già efficacemente impiegata nell'implementazione di modelli elastoplastici.

Il valore di  $M_c^{b,c,d}$  è calcolato per percorsi di carico in compressione e ricavabile tramite le relazioni di *Li and Dafalias (2000)*:

$$M^b = M \exp(-n^b \psi) \quad (2.3.13)$$

$$M^d = M \exp(n^d \psi) \quad (2.3.14)$$

con  $\psi$  pari alla differenza  $e - e_c$  mentre  $n^b$  e  $n^d$  sono parametri del modello.

#### 2.3.1.4 Deformazioni plastiche e inrudimento cinematico

La direzione del tensore deformazioni plastiche è data da:

$$\underline{R} = \underline{R}_d + D/3 \underline{I} \quad (2.3.15)$$

A differenza del modello PB, la legge di flusso nel modello DM è completamente non-associata (anche nel piano deviatorico).

Il parametro  $D$  è dato dalla relazione:

$$D = A_d d^d \quad (2.3.16)$$

$$A_d = A_0 (1 + \langle \underline{z} : \underline{n} \rangle) \quad (2.3.17)$$

- $A_0 > 0$  parametro del modello;

- $d^I$  è la distanza scalare dalla superficie di dilatanza espressa dalla relazione:

$$d^d = (\underline{\alpha}^d - \underline{\alpha}) : \underline{n} \quad (2.3.18)$$

- $\underline{z}$  è il tensore di tessitura.

Se lo stato tensionale oltrepassa la superficie di dilatanza,  $d^I$  diventa negativo e il materiale dilata ( $D < 0$ ). Per assicurare che non ci sia dilatanza nel caso in cui  $\psi > 0$  e  $d^I < 0$ , si impone  $D = 0$ .

$\underline{R}_d$  è dato dalla relazione

$$\underline{R}_d = B \underline{n} + C (\underline{n} : \underline{n} - 1/3 \underline{I}) \quad (2.3.19)$$

$$B = 1 + \frac{3}{2} \frac{1-c}{c} g(\theta, c) \cos 3\theta \quad (2.3.20)$$

$$C = 3 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1-c}{c} g(\theta, c) \quad (2.3.21)$$

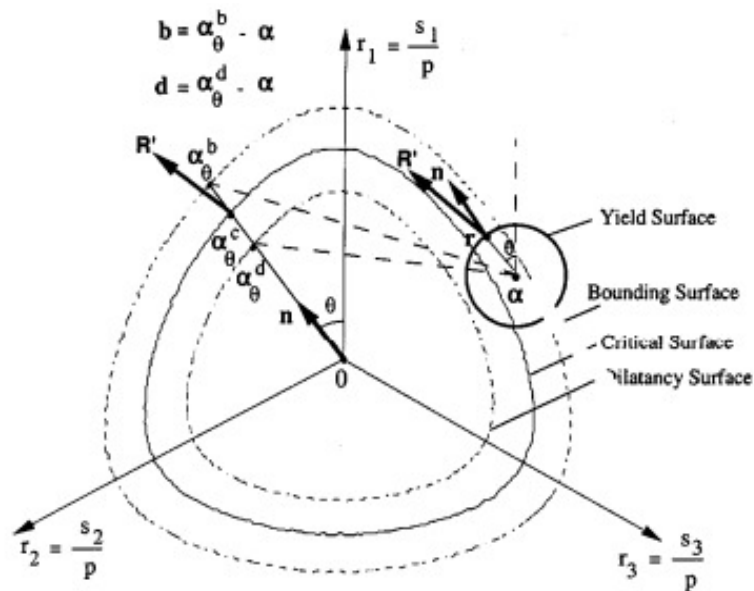


Figura 2.3.2: Le tre superfici (bordo, stato critico e dilatanza), la superficie di plasticizzazione e il vettore incremento di deformazioni plastiche  $\underline{R}'$  nel piano deviatorico.

Come per il modello di *Manzari & Dafalias (1997)* e per quello di *Papadimitrou & Bouckovalas (2001, 2002)*, le leggi di incrudimento hanno la forma:

- a)  $\dot{\underline{\alpha}} = \dot{\lambda} \underline{\alpha}$  per la parte cinematica;
- b)  $\dot{\underline{m}} = \dot{\lambda} \underline{m}$  per la parte isotropa.

E' stato tuttavia ipotizzato che:

- a) l'incrudimento isotropo sia nullo e quindi  $\underline{m} = 0$  ;
- b)  $\underline{\alpha}$  sia diretto verso la  $\alpha_0^b$  secondo la relazione

$$\dot{\underline{\alpha}} = \frac{2}{3} h (\underline{\alpha}_0^b - \underline{\alpha}) \quad (2.3.22)$$

$$h = \frac{b_0}{(\underline{\alpha} - \underline{\alpha}_{sr}) : \underline{n}} \quad (2.3.23)$$

$$b_0 = G_0 h_0 (1 - C_h e) \left( \frac{p}{p_a} \right)^{0.5} \quad (2.3.24)$$

$h_0, G_0, C_h$  sono parametri del modello.

Il tensore  $\underline{\alpha}_{sr}$  viene aggiornato quando è soddisfatta la relazione  $(\underline{\alpha} - \underline{\alpha}_{sr}) : \underline{n} < 0$  .

### 2.3.1.5 Effetto dell'evoluzione della tessitura durante i cicli

L'evoluzione del tensore di tessitura  $\underline{z}$  durante i cicli è regolato dalla legge :

$$d \underline{z} = -C_z \left\langle -d \epsilon_v^p \right\rangle (\underline{n} z_{max} + \underline{z}) \quad (2.3.25)$$

$C_z$  e  $z_{max}$  sono parametri del modello.

## 2.3.2 Parametri del modello

<i>Parametro</i>	<i>Significato fisico</i>
$G_0$	Costante che def. rigidità el. $G_{\max}$ .
$\nu$	Coeff. di Poisson
$M$	Resistenza a stato critico in compressione tx.
$c$	Rapporto tra la resistenza a stato critico in comp. tx. e quella in estensione tx.
$\lambda_c$	Pendenza della curva di S.C. nel piano e-p'
$e_0$	Intercetta della curva di S.C. nel piano e-p'
$\xi$	Esponente della curva di S.C. nel piano e-p'
$m$	Semiapertura della superficie di snervamento
$h_0$	Costante del modulo plastico
$c_h$	Costante del modulo plastico
$n^b$	Effetto di $\Psi$ sulla superficie di dilatanza
$A_0$	Costante di dilatanza
$n^d$	Effetto di $\Psi$ sulla resistenza di picco
$z_{\max}$	Seconda costante legge di evoluzione del <i>fabric</i>
$c_z$	Prima costante legge di evoluzione del <i>fabric</i>

Tabella 1: Il modello di *Dafalias & Manzari (2004)*. Le costanti del modello.



## Capitolo 3

# **IMPLEMENTAZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI COSTITUTIVE IN CODICI AGLI ELEMENTI FINITI**

### 3.1 INTRODUZIONE

La soluzione di un problema di valori iniziali, come definito da *Simo e Hughes (1997)*, utilizzando il metodo degli elementi finiti segue la seguente strategia generale:

- 1) a partire dalle equazioni differenziali che governano il fenomeno, si ricava un sistema di equazioni algebriche non lineari tramite una opportuna discretizzazione spaziale e temporale;
- 2) per ogni iterazione globale, le equazioni di equilibrio consentono di determinare incrementi di spostamento e quindi di deformazione;
- 3) per ogni incremento di deformazione, i valori aggiornati delle variabili di stato sono ottenuti integrando numericamente le equazioni costitutive a livello *locale* a partire dalle condizioni iniziali;
- 4) il controllo sulla convergenza delle equazioni di bilancio consente di stabilire se l'equilibrio è stato raggiunto oppure è necessario ritornare al punto (2).

L'integrazione di equazioni costitutive a livello *locale* (punto 3) rappresenta il problema centrale della plasticità computazionale (*Hughes, 1984*) e la precisione con cui esse sono risolte ha un effetto diretto sulla accuratezza della analisi.

Le procedure numeriche, sviluppate a livello di punto di Gauss, che consentono di integrare le equazioni costitutive del modello si chiamano *algoritmi di punto di Gauss* (o *stress-point algorithms*). Tali procedure hanno il compito di determinare lo stato  $(\sigma_{n+1}, q_{n+1})$  essendo noto iniziale  $(\sigma_n, q_n)$  all'istante  $t_n$ , nel generico intervallo di tempo  $[t_n; t_{n+1}]$  ed assegnato un incremento di deformazioni  $\Delta \epsilon_{n+1} = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n$ . ( $\sigma$  rappresenta lo stato tensionale e  $q$  le variabili interne).

Gli algoritmi di punto di Gauss maggiormente impiegati nella plasticità computazionale sono:

1. algoritmi *espliciti*;
2. algoritmi *impliciti*.

Gli algoritmi espliciti sono quelli che determinano lo stato del materiale  $(\sigma_{n+1}, q_{n+1})$  valutando la legge di evoluzione in corrispondenza di uno stato noto  $(\sigma_n, q_n)$ . L'algoritmo esplicito più semplice e più diffuso si chiama metodo di Eulero in avanti (*Forward Euler Algorithm*) che ha il vantaggio di essere da un



lato semplice da implementare ma dall'altro condizionatamente stabile e con accuratezza del primo ordine. A rigore è possibile ottenere una soluzione senza l'ausilio di alcuna iterazione, tuttavia, lo stato del materiale così calcolato non rispetta la consistenza e quindi, in presenza di legami elastoplastici, è in genere opportuno introdurre uno schema iterativo che riporti lo stato tensionale sulla superficie di snervamento. *Sloan (1987)* ha messo in evidenza che l'accuratezza e l'efficienza dei metodi espliciti sono notevolmente migliori se si introducono sia il *substepping* automatico sia il controllo dell'errore.

Gli algoritmi impliciti invece sono quelli che determinano lo stato del materiale  $(\sigma_{n+1}, q_{n+1})$  valutando la legge di evoluzione in corrispondenza dello stato finale non noto  $(\sigma_{n+1}, q_{n+1})$ . Questo approccio ha notevoli vantaggi. Esso infatti non necessita la determinazione del punto di intersezione con la superficie di snervamento, è incondizionatamente stabile e rispetta sempre la consistenza, poiché essa è definita come condizione sullo stato finale del materiale. L'algoritmo tuttavia ha bisogno di un metodo iterativo per la soluzione del sistema di equazioni non-lineari ed è quindi più complicato da implementare.

Tra gli algoritmi impliciti si può ricordare quello di *Ortiz e Simo (1986)*. Questo approccio ha l'inconveniente di calcolare la derivata del potenziale plastico e della funzione di plasticizzazione in corrispondenza dello stato di tensione determinato da una soluzione di tentativo elastica e quindi in uno spazio tensionale non lecito. Questa procedura introduce errori anche significativi nella valutazione delle deformazioni plastiche ed è stata superata da formulazioni successive.

Un algoritmo implicito molto utilizzato nella plasticità computazionale è il metodo generalizzato di Eulero all'indietro (*General Backward Euler, GBE*) (*Simo & Hughes, 1997*). Esso ha una accuratezza del primo ordine, fornisce una soluzione indipendente dall'incremento di deformazione ma calcola le deformazioni plastiche per ciascun incremento utilizzando il gradiente del potenziale plastico in corrispondenza della fine dell'incremento stesso. Questa approssimazione è valida a rigore solamente nel caso in cui la direzione del gradiente del potenziale plastico non vari lungo l'incremento di carico. Inoltre, se si utilizza il metodo di Newton – Raphson per ricavare la soluzione del sistema di equazioni non – lineari, è necessario calcolare la derivata seconda della funzione potenziale plastico, che tuttavia non è semplice da ricavare per funzioni complesse e irregolari.

L'algoritmo GBE è stato utilizzato nella geomeccanica computazionale da diversi autori. *Borja & Lee (1990)* e *Borja (1991)* lo hanno usato per integrare modelli di Stato Critico a due invarianti come quello di Cam-Clay. *Jeremic & Strue (1997)* hanno esteso il campo anche a modelli a tre invarianti ad incrudimento isotropo. *Tamagnini & Borja (1998)* hanno sviluppato un particolare metodo GBE nello

spazio delle deformazioni principali elastiche per il modello di Cam-Clay modificato per deformazioni finite e *Tamagnini et al. (2002)* hanno utilizzato il metodo per un modello ad incrudimento isotropo con degradazione chimica.

Non è possibile stabilire a priori quale sia la strategia “migliore” da adottare per integrare le equazioni costitutive a livello locale. Questa scelta dipende sia dalla accuratezza ed efficienza che si intende raggiungere, sia dalla complessità del modello costitutivo. Uno studio di *Potts & Ganendra (1994)*, prendendo in esame il modello di Cam-Clay, ha confrontato le soluzioni fornite dal metodo esplicito di *Sloan (1987)* e da quello di *Ortiz & Simo (1986)* rispetto alle soluzioni analitiche, mostrando che il primo metodo risulta più robusto ed efficiente del secondo.

Questo capitolo descrive le strategie numeriche utilizzate per integrare le leggi di evoluzione dei modelli di *Dafalias & Manzari (2004)* e *Papadimitrou & Bouckovalas (2002)*.

In totale sono state messe a punto due tipi di implementazioni:

- a livello di punto di Gauss, utilizzabile nei problemi al finito (solo per il modello D&M(2004));
- a livello di elemento di volume, utile solo come soluzione di riferimento per un confronto (per tutti e due i modelli: D&M(2004), P&B(2002)).

La strategia numerica a livello di punto di Gauss scelta per il modello di *Dafalias & Manzari (2004)* è un algoritmo esplicito adattativo di Runge-Kutta-Fehlberg (RKF23) con passo variabile e controllo dell'errore già utilizzato da *Sellari (2007)* e *Miriano (2011)*. In particolare *Miriano (2011)* ha utilizzato questa strategia per il modello di *Papadimitrou & Bouckovalas (2002)*.

La soluzione di riferimento è stata determinata predisponendo una implementazione in MATLAB a livello dell'elemento di volume che utilizza l'algoritmo di *Bardet & Chouhair (1991)*. Tale lavoro di implementazione si è basato sulla correzione e modifica di uno strumento già sviluppato da Mahdi Taiebat per il modello di materiale *Dafalias & Manzari (2004)*. L'implementazione del modello di *Papadimitrou & Bouckovalas (2002)* infine è stata utilizzata da *Miriano (2011)* per validare la sua implementazione in Fortran dello stesso modello a livello di punto di Gauss.

### 3.2 L'ALGORITMO DI BARDET & CHOUCAIR (1991)

L'algoritmo di *Bardet & Choucair (1991)* è una tecnica numerica che integra le equazioni costitutive scritte in forma incrementale e consente di ottenere la risposta dovuta a percorsi di carico generici monotoni o ciclici, rappresentata dalla curva tensioni – deformazioni. Questo metodo tuttavia non è in grado di competere con i moderni algoritmi di integrazioni usati nei codici agli elementi finiti, bensì consente di ottenere solamente una soluzione di riferimento (*bench-mark*).

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti e materiale non viscoso, è possibile scrivere le condizioni di vincolo tra tensioni e deformazioni nella forma:

$$\mathbf{S} d\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{E} d\boldsymbol{\epsilon} = d\mathbf{Y}$$

Le matrici  $\mathbf{S}$  ed  $\mathbf{E}$  rappresentano le matrici di vincolo composte da coefficienti indipendenti dal percorso di carico imposto. Il vettore  $d\mathbf{Y}$  rappresenta l'incremento di carico generalizzato per il percorso di carico scelto.

Se l'incremento di tensione è proporzionale all'incremento di deformazione tramite un legame costitutivo espresso in forma incrementale, l'espressione diventa:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\epsilon} &= d\mathbf{Y} \\ d\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \cdot d\boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Il tensore incremento di deformazione ha 6 componenti indipendenti e quindi la soluzione si ottiene risolvendo un sistema di 6 equazioni di vincolo. Il vettore  $d\mathbf{Y}$  è rappresentato da un vettore a sei componenti definito come:

$$d\mathbf{Y} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ dX]^T$$

dove  $dX$  rappresenta la variabile di carico che controlla il processo.

L'algoritmo è stato usato per integrare diversi modelli costitutivi elastoplastici perfetti, ad incrudimento isotropo, ad incrudimento cinematico e ipoplastici (*Sellari, 2007*).

Per integrare le equazioni costitutive di un modello elastoplastico è necessario risolvere la seguente procedura:

- 1) Assegnati i valori iniziali di  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}$  e  $q$ ;

- 2) Definire le matrici di vincolo  $S$  ed  $E$  e l'incremento di carico  $dX$ ;
- 3) Calcolare la matrice di cedevolezza elastica  $B = D_{el}^{-1}$  ;
- 4) Calcolare i coefficienti della matrice  $A = S + E \cdot B$  ;
- 5) Ricavare l'incremento di tensione elastico  $d\sigma = A^{-1} \cdot dY$  ;
- 6) Controllare se  $f(\sigma + d\sigma, q) \leq 0$  (allora andare al punto 14);
- 7) Calcolare  $x$  tale che  $f(\sigma + x d\sigma, q) = 0$  ;
- 8) Aggiornare lo stato tensionale e deformativo:  $\sigma + x d\sigma \rightarrow \sigma$  ,  $\epsilon + x B \cdot d\sigma \rightarrow \epsilon$  ;
- 9) Calcolare i coefficienti della matrice di cedevolezza elastica, il modulo plastico, la normale alla superficie di plasticizzazione e alla superficie di snervamento in corrispondenza dello stato tensionale  $\sigma, \epsilon$  ;
- 10) Costruire la matrice di cedevolezza elastoplastica  $B^{ep}$  ;
- 11) Calcolare i coefficienti  $A = S + E \cdot B^{ep}$  ;
- 12) Dopo aver imposto  $dY_6 = (1 - x)dX$  , calcolare l'incrementi di tensione elastoplastico  $d\sigma = A^{-1} \cdot dY$  ;
- 13) Aggiornare le variabili interne  $q$  se  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot d\sigma > 0$  ;
- 14) Aggiornare lo stato tensionale e deformativo:  $\sigma + x d\sigma \rightarrow \sigma$  ,  $\epsilon + x B \cdot d\sigma \rightarrow \epsilon$  ;

### 3.3 ALGORITMO RKF23

La strategia numerica di Runge-Kutta-Fehlberg (RKF23) è un algoritmo esplicito adattativo che deriva dalla evoluzione dello schema di Eulero modificato proposto da *Sloan (1987)*.

Questa strategia è molto efficiente ed accurata. L'efficienza dipende dalla procedura di *substepping* mentre l'accuratezza dipende sia dalla tolleranza imposta sull'errore (*TOL*) sia dagli schemi utilizzati (Eulero modificato e Runge-Kutta rispettivamente di ordine 2 e 3).

L'algoritmo RKF23 richiede che le equazione differenziali del sistema siano scritte nella forma:

$$\dot{y} = f(y) \quad (3.3.1)$$

in cui:

$$y = \begin{Bmatrix} \sigma \\ q \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad f(y) = \frac{1}{\Delta t_{n+1}} \begin{Bmatrix} D \Delta \epsilon_{n+1} \\ H \Delta \epsilon_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (3.3.2)$$

La velocità di deformazione si assume costante in tutto l'intervallo di integrazione ed è definita:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\Delta \epsilon_{n+1}}{\Delta t_{n+1}} \quad (3.3.3)$$

Se si sostituisce la variabile tempo  $t$  con la variabile  $T$  che assume valori compresi tra 0 e 1, l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione dello stato del materiale diventa :

$$\frac{dy}{dT} = F(y) \quad (3.3.4)$$

$$F(y) := \begin{Bmatrix} D \Delta \epsilon_{n+1} \\ H \Delta \epsilon_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (3.3.5)$$

$$T_{n+1} := \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \quad t \in \{t_n; t_{n+1}\} \quad (3.3.6)$$

Se  $T_{n+1}=1$  la deformazione imposta nell'intervallo  $n+1$  è proprio pari all'incremento di deformazione totale  $\Delta \epsilon_{n+1}$  dell'intervallo. L'introduzione della variabile  $T$  è utile poiché questa procedura di integrazione prevede anche la possibilità di suddividere ulteriormente l'intervallo di tempo  $T_{n+1}$  in tanti intervalli  $(n_s) \Delta T_{n+1}^k$  di ampiezza variabile tali che:

$$\sum_{k=1, n_s} \Delta T_{n+1}^k = 1 \quad (3.3.7)$$

Così facendo l'incremento di deformazione imposta  $\Delta \epsilon_{n+1}^k$  nell'intervallo considerato  $\Delta T_{n+1}^k$  è soltanto una percentuale di quella totale.

La procedura adattativa utilizzata nell'algoritmo RKF23 confronta due soluzioni di ordine diverso in modo tale da definire una quantità che rappresenta l'errore relativo.

Le due soluzioni messe a confronto sono:

1. Eulero modificato (di ordine 2);

$$\tilde{\mathbf{y}}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{y}_{n+1}^k + \Delta T_{n+1}^k \sum_{j=1,2} \tilde{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_{n+1}^k, \Delta T_{n+1}^k) \quad (3.3.8)$$

$$\tilde{C}_1 = 0; \tilde{C}_2 = 1 \quad (3.3.9)$$

2. Runge-Kutta (di ordine 3).

$$\hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{y}_{n+1}^k + \Delta T_{n+1}^k \sum_{j=1,3} \hat{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_{n+1}^k, \Delta T_{n+1}^k)$$

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_3 = 1/6; \hat{C}_2 = 2/3 \quad (3.3.10)$$

Le funzioni  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  e  $\mathbf{k}_3$  sono date da:

$$\mathbf{k}_1 := \mathbf{F}(\mathbf{y}_{n+1}^k)$$

$$\mathbf{k}_2 := \mathbf{F}(\mathbf{y}_{n+1}^k + 0.5 \Delta T_{n+1}^k \mathbf{k}_1) \quad (3.3.11)$$

$$\mathbf{k}_3 := \mathbf{F}(\mathbf{y}_{n+1}^k - \Delta T_{n+1}^k \mathbf{k}_1 + 2 \Delta T_{n+1}^k \mathbf{k}_2) \quad (3.3.12)$$

Le due soluzioni così ottenute consentono di adattare l'ampiezza del *substep* con la procedura che segue:

- sia  $\mathbf{R}_{n+1}^{k+1} := \hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{k+1} - \tilde{\mathbf{y}}_{n+1}^{k+1}$  ;
- è possibile definire una misura scalare dell'errore relativo  $R_{n+1}^{k+1} := \frac{\|\mathbf{R}_{n+1}^{k+1}\|}{\|\hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{k+1}\|}$  ;
- se  $R_{n+1}^{k+1} < TOL$  allora  $\hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{k+1}$  viene accettata come soluzione e la dimensione dello step successivo viene calcolata tramite la relazione (Sloan, 1987):

$$\Delta T_{n+1}^{k+1} = \min \left\{ 0.9 \Delta T_{n+1}^k \left[ \frac{TOL}{R_{n+1}^{k+1}} \right]^{1/3}; 4 \Delta T^k \right\} \quad (3.3.13)$$

- in caso contrario si ripete il calcolo riducendo il *timestep* con la seguente espressione (Sloan, 1987):

$$\Delta T_{n+1}^{k+1} = \max \left\{ 0.9 \Delta T^k \left[ \frac{TOL}{R_{n+1}^{k+1}} \right]^{1/3}; 0.25 \Delta T_k \right\} \quad (3.3.14)$$

e la procedura di integrazione viene ripetuta fino a che  $R_{n+1}^{k+1} < TOL$ .

Tale procedura si arresta quando  $T_{n+1} = 1$  e si passa allo *step* successivo  $\{t_{n+1}, t_{n+2}\}$ .

Quando la soluzione viene accettata alla fine della *k*-esima iterazione, in generale lo stato del materiale può non rispettare la consistenza e lo stato tensionale può trovarsi all'esterno della superficie di plasticizzazione e quindi in una zona non lecita. Per questa ragione è necessario introdurre una ulteriore procedura di correzione che si basa sulla ipotesi che lo stato di deformazione rimanga costante. Questa correzione prende il nome di *correzione del drift* e può riguardare solamente lo stato tensionale oppure sia lo stato tensionale sia le variabili interne. Nel primo caso la procedura si chiama “correzione normale” mentre nel secondo si chiama “correzione consistente”. Tutte e due le procedure sono state utilizzate nella implementazione del modello D&M (2004).

### 3.3.1 La procedura di integrazione

- 1) Inizializzazione del contatore del *substep*, del tempo e dello stato del materiale (tensione e variabili interne)

$$k=1 \quad T_{n+1}^k=0 \quad \Delta T_{n+1}^k=1 \quad \mathbf{y}_{n+1}^k=\mathbf{y}_n \quad (3.3.15)$$

- 2) Controllo se il processo di integrazione è completo

se  $T_{n+1}^k=1$  allora andare direttamente al *punto 10*

- 3) Valutazione delle soluzioni approssimate

$$\tilde{\mathbf{y}}_{n+1}^{k+1}=\mathbf{y}_{n+1}^k+\Delta T_{n+1}^k \sum_{j=1,2} \tilde{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_{n+1}^k, \Delta T_{n+1}^k) \quad (3.3.16)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{k+1}=\mathbf{y}_{n+1}^k+\Delta T_{n+1}^k \sum_{j=1,3} \hat{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_{n+1}^k, \Delta T_{n+1}^k) \quad (3.3.17)$$

- 4) Calcolo dell'errore relativo

$$R_{n+1}^{k+1}:=\frac{\|\mathbf{R}_{n+1}^{k+1}\|}{\|\hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{k+1}\|} \quad (3.3.18)$$

- 5) Se l'errore è maggiore della tolleranza imposta (*TOL*)

Se  $R_{n+1}^{k+1}>TOL$  allora direttamente al *punto 9*

- 6) Aggiornamento della variabile tempo adimensionale e lo stato del materiale

$$T_{n+1}^{k+1}=T_{n+1}^k+\Delta T_{n+1}^k \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_{n+1}^{k+1}=\hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{k+1} \quad (3.3.19)$$

- 7) Se la consistenza non è rispettata, *correzione del drift*

- 8) Valutazione dell'entità del *substep* successivo

$$\Delta T_{n+1}^{k+1}=\min \left\{ 0.9 \Delta T_{n+1}^k \left[ \frac{TOL}{R_{n+1}^{k+1}} \right]^{1/3}; 4 \Delta T_{n+1}^k \right\} \quad \text{e andare al } \textit{punto 2}$$

- 9) Ricalcolo della dimensione del *substep* ridotta



$$\Delta T^{k+1} = \max \left\{ 0.9 \Delta T^k \left[ \frac{TOL}{R_{n+1}^{k+1}} \right]^{1/3}; 0.25 \Delta T^k \right\} \quad \text{e andare al punto 3}$$

10) Il processo è completato  $\mathbf{y}_{n+1} = \hat{\mathbf{y}}_{n+1}^{k+1}$  e USCITA

### 3.3.2 La linearizzazione consistente

Il metodo di *Newton–Raphson* è utilizzato per la risoluzione iterativa di problemi non lineari. Questo metodo risolutivo ha tasso di convergenza quadratico, cioè:

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}\| \leq c \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|^2$$

dove  $\mathbf{x}_{n+1}$  è la soluzione alla iterazione  $n+1$ ,  $c$  è una costante che dipende dalla non linearità del problema e  $\mathbf{x}$  è la soluzione del sistema di equazioni non lineari.

Le condizioni affinché si possa avere una convergenza quadratica sono:

- il residuo deve essere continuo e con derivata prima continua;
- la matrice inversa della matrice Jacobiana deve esistere e il suo valore deve essere finito e regolare nell'intorno della soluzione.

Tuttavia queste condizioni non sono soddisfatte nei problemi di ingegneria poiché per esempio la derivata del residuo non è continua quando si esaminano problemi con materiali elastoplastici. Il passaggio da uno stato elastico ad uno elastoplastico fa cambiare repentinamente la derivata del residuo. Altri problemi possono riguardare la matrice Jacobiana nei problemi di equilibrio. Quando il sistema si trova nelle vicinanze di una condizione di instabilità la matrice Jacobiana non è più regolare nell'intorno.

Per regolarizzare la matrice Jacobiana è necessario intervenire sulla matrice di rigidezza globale del sistema. Questa matrice si può calcolare direttamente ricavando la rigidezza tangente dalle leggi di evoluzione dei singoli *stress-algorithms* a livello locale e prende il nome di *matrice di rigidezza tangente*. Come già osservato precedentemente, l'uso di questa matrice può portare a un tasso di convergenza fortemente deteriorato poiché la rigidezza del materiale non è sempre continua. Per ovviare a questo problema si deve calcolare la *matrice di rigidezza consistente o algoritmica* (Simo & Hughes, 1997). Questa matrice si basa sulla rigidezza algoritmica del materiale a livello locale, cioè quella calcolata a partire da deformazioni finite o algoritmiche (e non infinitesime come quella tangente).

L'espressione della matrice di rigidità tangente consistente è la seguente :

$$\tilde{D}_{n+1}^k = \left( \frac{\delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} \right)_{n+1}^k$$

In alcuni casi è possibile ricavarla in forma esplicita (*Simo & Hughes, 1997*), tuttavia quando il modello costitutivo è molto complesso è necessario utilizzare una procedura di derivazione numerica.

Per il calcolo di  $\tilde{D}_{n+1}$  è stato sfruttando il concetto di derivata direzionale di *Frechet*. Detto  $\boldsymbol{\eta}$  un tensore unitario nello spazio delle deformazioni  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$ , la variazione di  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  nella direzione  $\boldsymbol{\eta}$  per una perturbazione infinitesima  $\theta$  del modulo di  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$  in tale direzione si esprime nella forma:

$$D \boldsymbol{\sigma}_{n+1}[\boldsymbol{\eta}] = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} + \theta \boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1})] \right\}$$

- $D \boldsymbol{\sigma}_{n+1}[\boldsymbol{\eta}]$  rappresenta la derivata di Frechet del tensore  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  nella direzione  $\boldsymbol{\eta}$ ;
- $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} + \theta \boldsymbol{\eta})$  e  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1})$  rappresentano lo stato tensionale calcolato in  $(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} + \theta \boldsymbol{\eta})$  e lo stato tensionale calcolato in  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$ .

L'espressione della matrice Jacobiana  $\tilde{D}$  è possibile ricavarla scegliendo le 6 direzioni di  $\boldsymbol{\eta}$  coincidenti con le 6 direzioni principali nello spazio  $\mathbb{R}^6$ .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_1 &= \{100000\}^T & \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_2 &= \{010000\}^T & \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_3 &= \{001000\}^T \\ \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_4 &= \{000100\}^T & \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_5 &= \{000010\}^T & \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_6 &= \{000001\}^T \end{aligned}$$

I vettori colonna della matrice  $\tilde{D}$  possono essere determinati:

$$\tilde{D}_{\alpha} = D \boldsymbol{\sigma}_{n+1}[\boldsymbol{e}_{\alpha}] = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} + \theta \boldsymbol{e}_{\alpha}) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1})] \right\}$$

$$\text{con } \alpha = 1, 2, \dots, 6.$$

Ad ogni iterazione, l'algoritmo viene utilizzato una volta per calcolare la soluzione corretta corrispondente allo stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1})$  e sei volte per ricavare le soluzioni perturbate. Il calcolo risulta perciò molto oneroso a livello locale. Solamente nel caso in cui si inducano significativi incrementi di deformazione tali da richiedere un elevato numero di iterazioni dell'algoritmo globale allora l'utilizzo della matrice di rigidità tangente risulta particolarmente efficace.

### 3.4 VALUTAZIONE DELLA RISPOSTA DEI MODELLI A LIVELLO DELL'ELEMENTO DI VOLUME

Prima di studiare problemi al finito, è stato necessario effettuare una serie di simulazioni monotone e cicliche per poter verificare la correttezza delle implementazioni dei modelli PB e DM.

Inizialmente sono stati messi a confronto i risultati delle implementazioni del modello di PB disponibili: algoritmo *Bardet & Chouhair*, *Miriano (2011)* e quella utilizzata dagli Autori PB. Successivamente sono stati confrontati i risultati delle implementazioni del modello DM: algoritmo *Bardet & Chouhair*, RKF23 e la versione disponibile in FEI (codice di calcolo FEM sviluppato dal Prof Boris Jeremic presso l'Università di Davis in California).

I risultati delle simulazioni condotte con l'implementazione del modello DM (quella che utilizza l'algoritmo RKF23) sono stati ottenuti con il driver di *Niemunnis* che, per assegnate le condizioni al contorno, integra le equazioni costitutive in un solo punto di Gauss.

#### 3.4.1 Modello PB(2002)

##### 3.4.1.1 Prove monotone

Sono state condotte simulazioni di prove TXCIU monotone sulla *Nevada Sand* avente indice dei vuoti iniziale pari a 0.66 e a tre differenti pressioni di confinamento (40 kPa, 80 kPa e 160 kPa). I parametri del modello sono stati scelti direttamente dalle calibrazioni effettuate nell'articolo di P&B(2002).

Il grafico in Figura 3.4.1 rappresenta il confronto tra i risultati sperimentali (punti), le simulazioni condotte dagli Autori (*Papadimitrou e Bouckovalas*) con la loro implementazione (linee nere) e le simulazioni con l'algoritmo *Bardet & Chouhair*. Queste ultime sembrano differire leggermente dalle precedenti ma i risultati forniti dall'implementazione di *Miriano (2011)*, anche se non sono stati rappresentati in figura, ne confermano la correttezza poiché sono perfettamente sovrapposti a questi ultimi.

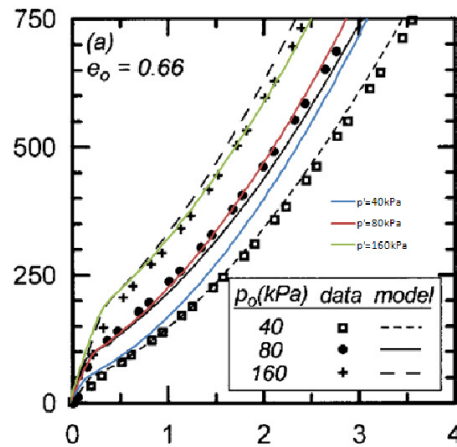


Figura 3.4.1: Confronto tra dati sperimentali (*data*), implementazione degli autori P&B (*model*) e implementazione in MATLAB (*curve colorate*)

### 3.4.1.2 Prove cicliche

Sono state condotte simulazioni di prove TXCIU cicliche sulla *Nevada Sand* avente indice dei vuoti iniziale pari a 0.73. I parametri del modello sono stati scelti direttamente dalle calibrazioni effettuate nell'articolo di P&B(2002).

Il grafico (Figura 3.4.2) rappresenta il confronto tra le simulazioni con algoritmo *Bardet & Choucair* (linea blue), quelle ottenute da *Miriano (2011)* (punti rossi) e quelle ottenute dagli Autori P&B con la loro implementazione (linee nere), . Queste simulazioni sembrano essere molto simili tra di loro.

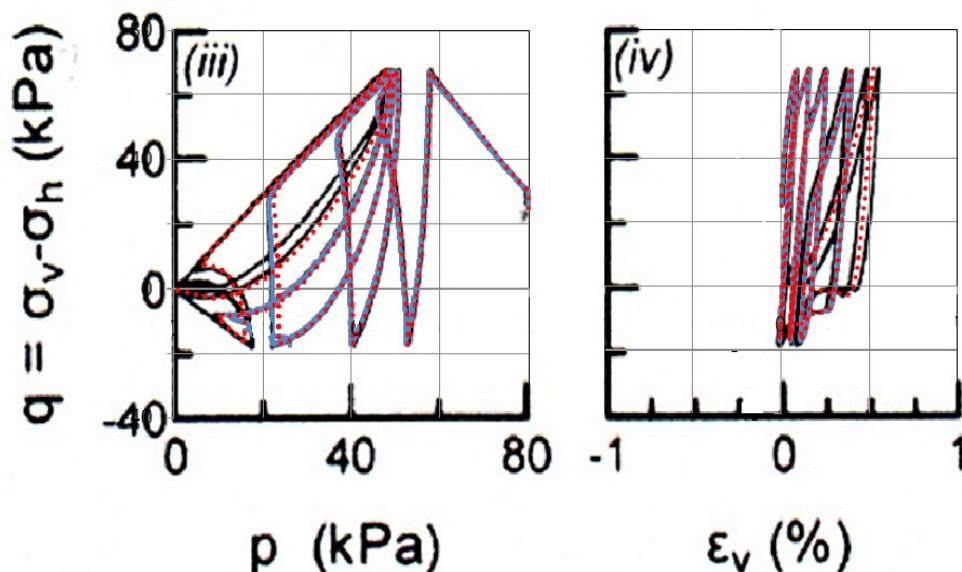


Figura 3.4.2: Risultati di una prova triassiale ciclica. Confronto tra risultati ottenuti dall'implementazione in MATLAB (linea continua blue), quella di *Miriano (2011)* (punti rossi) e quella degli autori P&B (2002) (linea nera continua).

### 3.4.2 Modello DM(2004)

#### 3.4.2.1 Prove monotone

Sono state condotte simulazioni di prove TXCIU monotone sulla *Toyoura Sand* avente indice dei vuoti iniziale pari a 0.96. I parametri del modello sono stati scelti direttamente dalle calibrazioni effettuate nell'articolo di D&M(2004). Il grafico rappresenta il confronto tra i risultati sperimentali (punti), simulazioni condotte dagli Autori (*Dafalias e Manzari*) con la loro implementazione (linee nere) e le simulazioni con gli algoritmi *Bardet & Choucair* e RKF23. I risultati forniti da queste ultime due sono perfettamente sovrapposte a quelli ottenuti da *Dafalias e Manzari*.

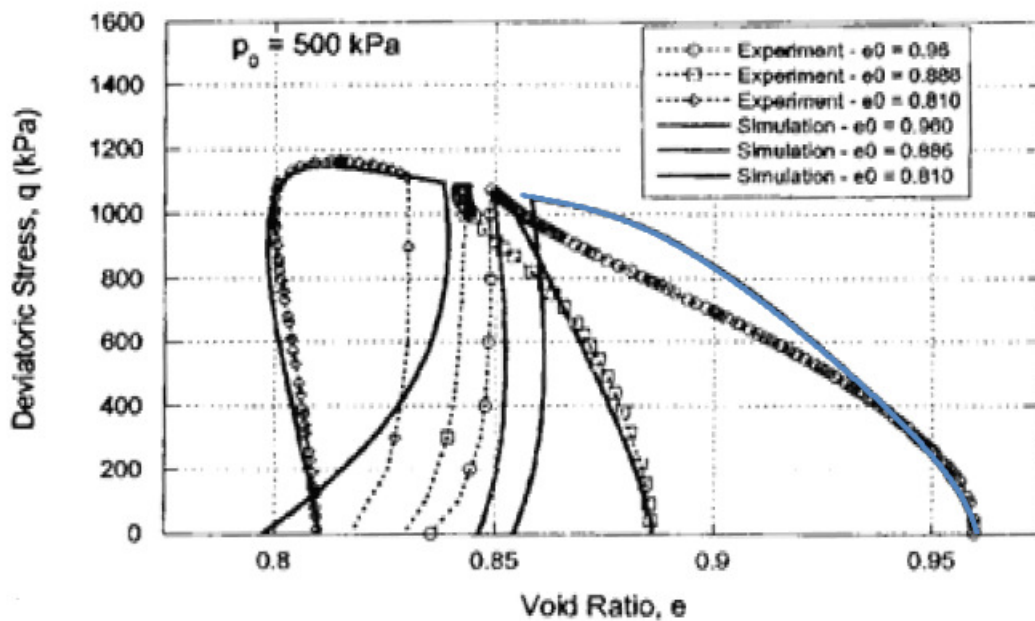


Figura 3.4.3: Prova triassiale in condizioni non drenate. Confronto tra dati sperimentali (*Experiment*), implementazione degli autori (*Simulation*), implementazione con algoritmo di Bardet (*linea continua blue*) e implementazione con algoritmo RKF23 (*sovrapposta alla linea blue*).

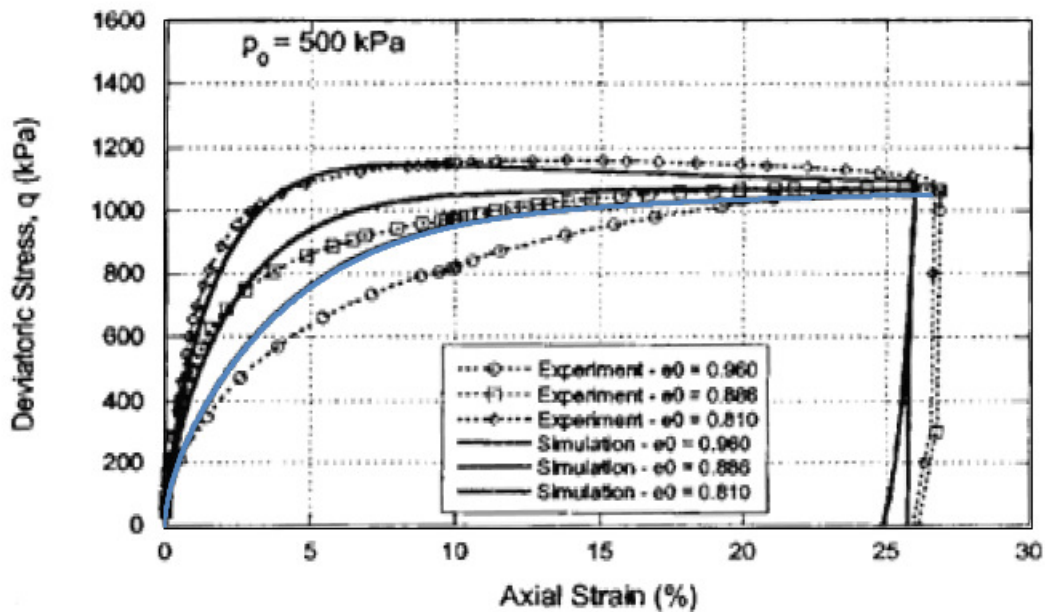


Figura 3.4.4: Prova triassiale in condizioni non drenate. Confronto tra dati sperimentali (*Experiment*), implementazione degli autori (*Simulation*), implementazione con algoritmo di Bardet (*linea continua blue*) e implementazione con algoritmo RKF23 (*sovrapposta alla linea blue*).

### 3.4.2.2 Prove cicliche

Sono state condotte simulazioni di prove TXCIU cicliche e prove di taglio semplice ciclico sulla *Toyoura Sand* avente indice dei vuoti iniziale pari a 0.73. I parametri del modello sono stati scelti direttamente dalle calibrazioni effettuate nell'articolo di D&M(2004). I grafici rappresentano il confronto tra le simulazioni condotte con l'implementazione che utilizza l'algoritmo *Bardet & Choucair*, con quella che si avvale dell'algoritmo RKF23 (linea nera) e con quella disponibile nel codice agli elementi finiti FEI (linea tratteggiata verde). Queste simulazioni sembrano essere molto simili tra di loro, praticamente coincidenti.

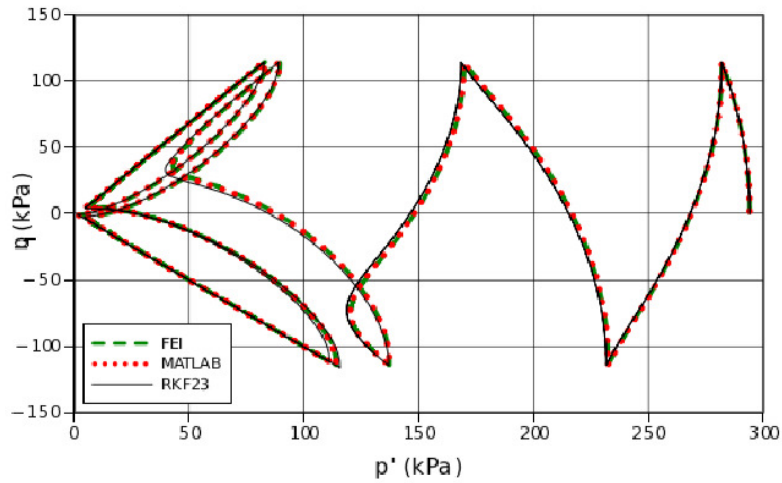


Figura 3.4.5: Prova TXCU ciclica. Confronto tra i risultati forniti dall'implementazione in FEI (*FEI*), da quella con l'algoritmo di Bardet (*MATLAB*) e quella con l'algoritmo di Runge-Kutta-Fehlberg (*RKF23*).

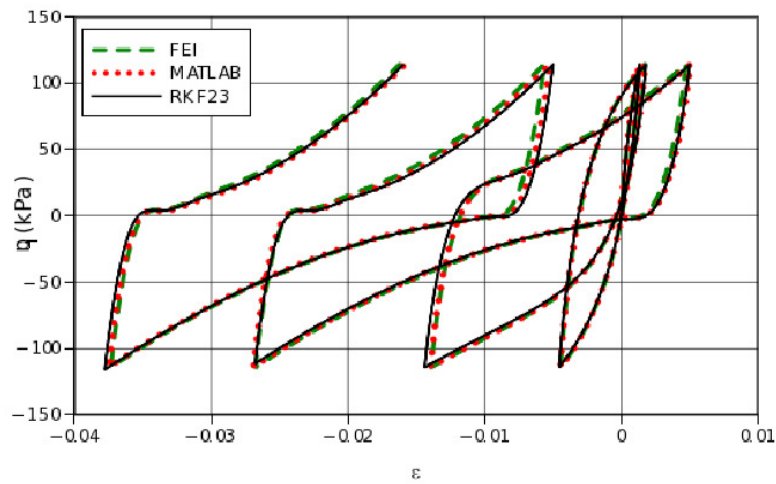


Figura 3.4.6: Prova TXCU ciclica (Figura 3.4.5).

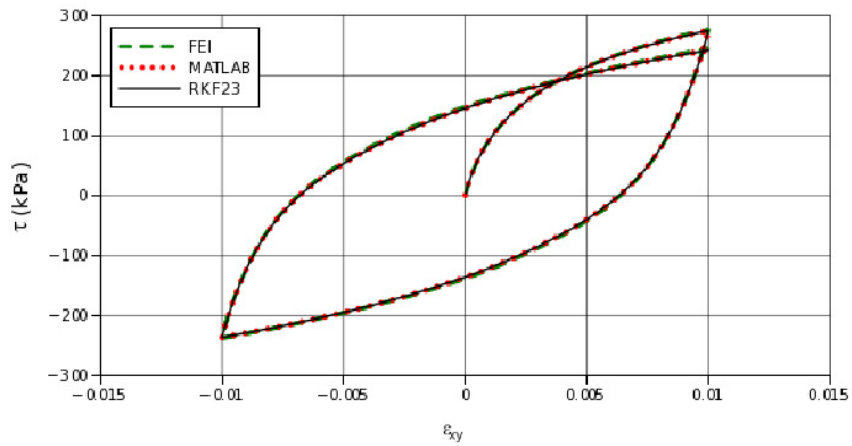


Figura 3.4.7: Prova di taglio semplice. Confronto tra i risultati forniti dall'implementazione in FEI (*FEI*), da quella con l'algoritmo di Bardet (*MATLAB*) e quella con l'algoritmo di Runge-Kutta-Fehlberg (*RKF23*).

### 3.5 ACCURATEZZA ED EFFICIENZA DELL'ALGORITMO RKF23

In questo paragrafo sono state messe in evidenza le prestazioni dell'algoritmo di integrazione delle equazioni costitutive. A tale proposito sono state eseguite alcune simulazioni numeriche, integrando le equazioni costitutive con il driver di *Niemunnis*.

E' stata presa in considerazione la *Toyoura Sand* i cui parametri sono rappresentati di seguito:

$$\begin{aligned} G_0 &= 125 \\ \nu &= 0.05 \\ M &= 1.25 \\ c &= 0.7125 \\ \lambda_c &= 0.019 \\ e_0 &= 0.934 \\ \xi &= 0.7 \\ m &= 0.01 \\ h_0 &= 7.05 \\ c_h &= 0.968 \\ n^b &= 1.1 \\ A_0 &= 0.704 \\ n^d &= 3.5 \\ z_{max} &= 4 \\ c_z &= 600 \end{aligned}$$

Sono stati presi in considerazione due differenti stati iniziali:

- Stato (D): normalmente consolidato in condizioni edometriche con  $p' = 65.5 \text{ kPa}$ ,  $q = 51.77 \text{ kPa}$  ( $\sigma_{11} = 100 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 48.23 \text{ kPa}$ ),  $\alpha = s/p'$ ,  $z = 0$ ,  $e_0 = 0.73$  ( $\psi < 0$ ).
- Stato (L): normalmente consolidato in condizioni edometriche con  $p' = 65.5 \text{ kPa}$ ,  $q = 51.77 \text{ kPa}$  ( $\sigma_{11} = 100 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 48.23 \text{ kPa}$ ),  $\alpha = s/p'$ ,  $z = 0$ ,  $e_0 = 0.93$  ( $\psi > 0$ ).

Sono stati considerati inoltre percorsi di deformazione in assialsimmetria applicati in un singolo passo e caratterizzati da un modulo  $\rho = |\Delta \epsilon|$ , variabile tra  $[10^{-5}; 10^{-3}]$  e da una direzione  $\alpha$  variabile tra  $[0; 2\pi]$ .

Nel paragrafo successivo sono stati rappresentati i risultati attraverso le *mappe di isoerrore* e di *isoefficienza*.



### 3.5.1 Mappe di isoerrore e di isoefficienza

Le simulazioni sono state condotte utilizzando il driver costitutivo di *Niemunnis* che, per assegnate condizioni al contorno, integra le equazioni costitutive in un solo punto di Gauss.

Il provino è stato sottoposto a percorsi puramente deformativi, applicati in un singolo *step* e caratterizzati dalle due quantità  $(\rho, \alpha)$ .

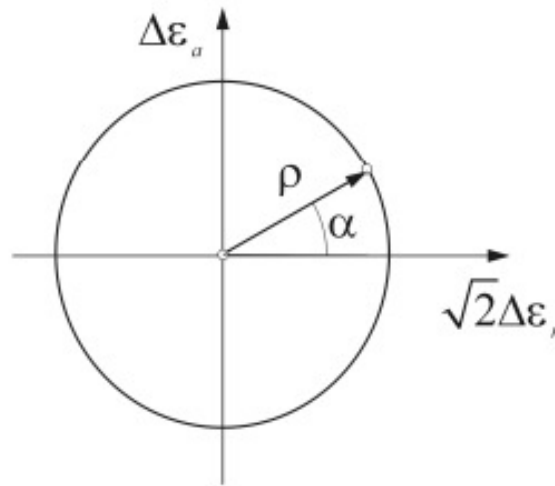


Figura 3.5.1: Percorsi di deformazione assialsimmetrici utilizzati nei test di accuratezza ed efficienza.

L'accuratezza numerica dell'algoritmo è stata stimata sulla base della seguente misura relativa dell'errore di integrazione:

$$ERR = ERR_{\sigma} + ERR_{\alpha} + ERR_z + ERR_e \quad (3.5.1)$$

in cui sono presenti le misure relative dell'errore corrispondenti allo stato tensionale, alla variabile interna  $\alpha$ , al tensore di tessitura  $z$  e all'indice dei vuoti  $e$ . Queste quantità sono definite:

$$ERR_{\sigma} := \frac{|\sigma - \sigma^*|}{|\sigma^*|} \quad (3.5.2)$$

$$ERR_{\alpha} := \frac{|\alpha - \alpha^*|}{|\alpha^*|} \quad (3.5.3)$$

$$ERR_{\alpha} := \frac{|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*|}{|\mathbf{z}^*|} \quad (3.5.4)$$

$$ERR_{\alpha} := \frac{|e - e^*|}{e^*} \quad (3.5.5)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{z}, e$  sono rispettivamente lo stato tensionale, il centro del cono elastico nel piano deviatorico, il tensore di tessitura e l'indice dei vuoti. Le quantità  $\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \mathbf{z}^*, e^*$  sono le soluzioni numeriche ritenute “esatte” cioè quelle determinate numericamente con l'algoritmo RKF23 utilizzando una tolleranza  $TOL=1.0e-8$ .

La valutazione dell'errore è stata eseguita per diversi valori della tolleranza ( $TOL$ ):  $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ . I risultati sono stati rappresentati in mappe chiamate di *isoerrore* ottenute per due differenti stati di addensamento.

Lo studio è stato anche ripetuto per uno stato tensionale molto basso ( $p'=10^{-4}$  kPa) per dimostrare il regolare funzionamento dell'algoritmo di integrazione anche vicino all'apice dei coni, dove il legame costitutivo è fortemente non lineare.

Per ciascun grafico, in ascissa è stata rappresentata l'entità della deformazione imposta  $\rho$  e in ordinata la direzione  $\alpha$  in radianti.

Dall'analisi delle figure (da 3.5.2 a 3.5.4 per la sabbia densa e da 3.5.5 a 3.5.6 per quella sciolta) si nota che a parità della coppia di valori  $(\rho, \alpha)$ , l'accuratezza della soluzione diminuisce all'aumentare di  $TOL$ . Inoltre, se si fissa  $\alpha$  e si aumenta  $\rho$  a parità di  $TOL$ , l'accuratezza diminuisce; tuttavia, l'errore risulta modesto anche a bassissimi livelli di confinamento (Figura 3.5.7).

Vi sono alcuni percorsi di deformazione per i quali l'errore è nullo (zone bianche nelle mappe *isoerrore*). Tali percorsi mantengono lo stato tensionale all'interno della superficie di snervamento. In tal caso la soluzione è ricavata in modo esatto, indipendentemente dalla procedura adattativa e dalla tolleranza specificata ( $TOL$ ). La zona bianca è più grande per il materiale sciolto (L) poiché esso è meno rigido di quello denso (D) (Figura 3.5.5 e Figura 3.5.6).

Per quanto riguarda l'efficienza invece, e' stata rappresentata la grandezza  $n_{fev}$  per ciascuna tolleranza  $TOL$ . Il numero totale  $n_{fev}$  rappresenta il numero di volte che viene chiamata l'equazione 3.3.1 durante l'integrazione numerica. Dall'analisi delle figure (da 3.5.8 a 3.5.11) si nota che, fissata la direzione del

percorso di deformazione e la sua intensità  $(\rho, \alpha)$ , l'efficienza della soluzione aumenta all'aumentare di TOL poiché  $n_{fev}$  diminuisce risparmiando considerevolmente i tempi di calcolo.

La scelta ottimale di TOL si ottiene come migliore compromesso tra elevata accuratezza ed elevata efficienza e, per questa ragione, è stata assunta pari a  $10^{-6}$ .

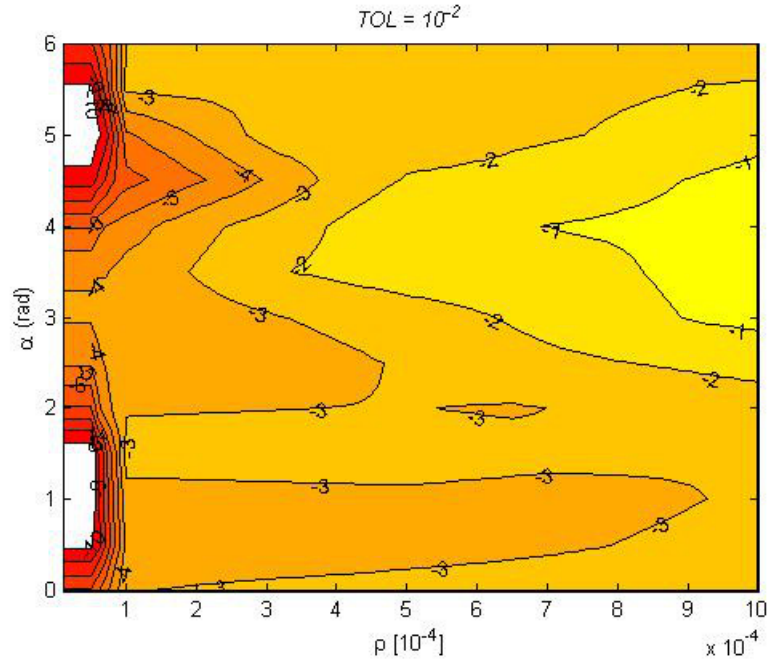


Figura 3.5.2: Mappa iso-errore. Sabbia densa. Stato (D). TOL= $10^{-2}$ .

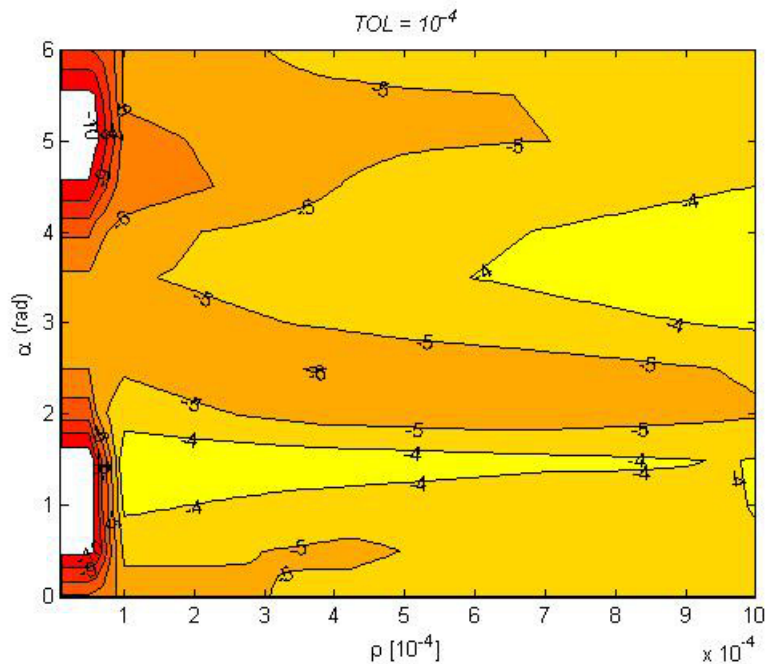


Figura 3.5.3: Mappa iso-errore. Sabbia densa. Stato (D). TOL= $10^{-4}$ .

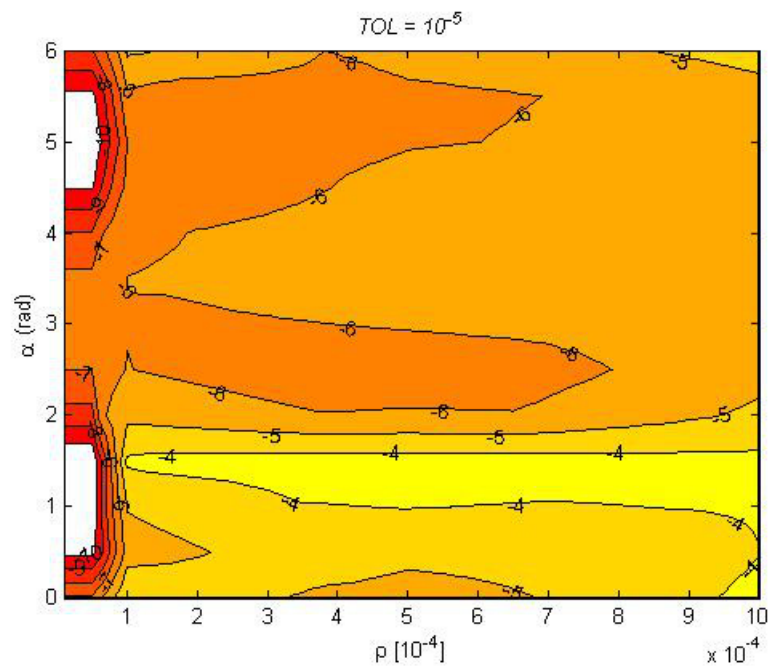


Figura 3.5.4: Mappa iso-errore. Sabbia densa. Stato (D).  $TOL=10^{-5}$ .

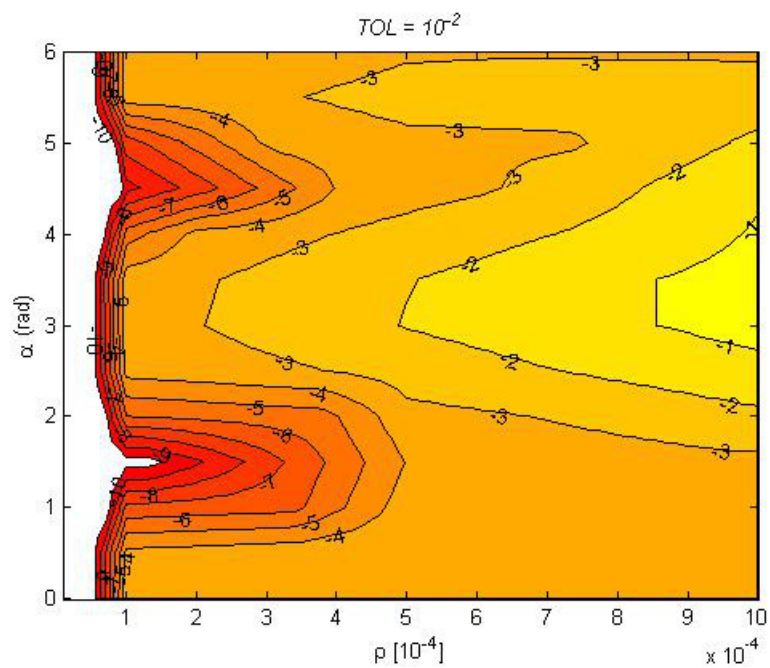


Figura 3.5.5: Mappa iso-errore. Sabbia sciolta. Stato (L).  $TOL=10^{-2}$ .

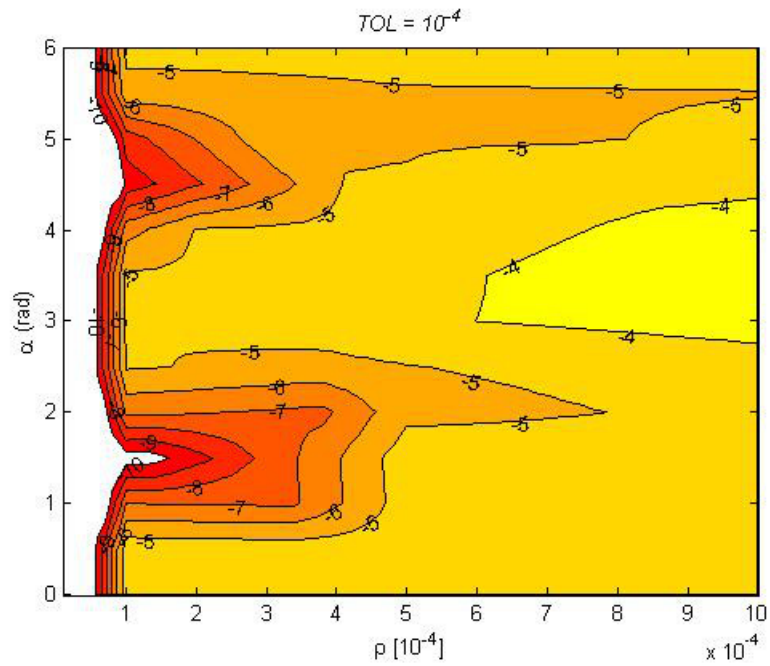


Figura 3.5.6: Mappa iso-errore. Sabbia sciolta. Stato (L).  $TOL=10^{-4}$ .

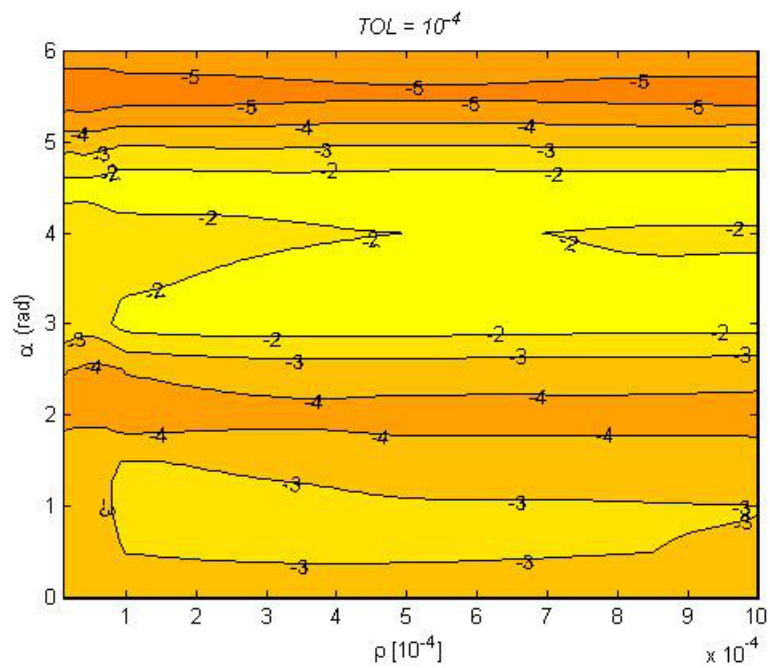


Figura 3.5.7: Mappa iso-errore. Sabbia densa. Stato (D).  $TOL=10^{-4}$ . Pressione  $p'=10^{-4}$  kPa.

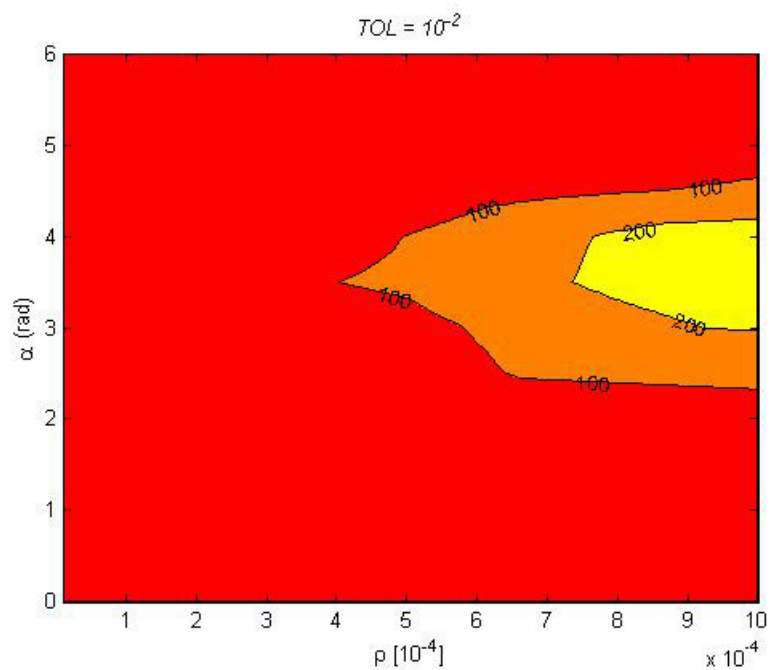


Figura 3.5.8: Mappa iso-efficienza. Sabbia densa. Stato (D).  $TOL=10^{-2}$ .

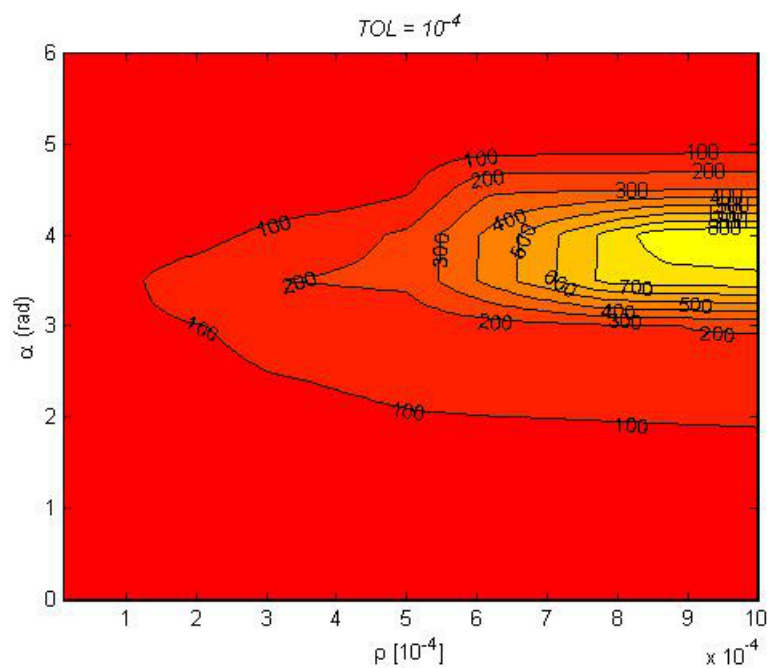


Figura 3.5.9: Mappa iso-efficienza. Sabbia densa. Stato (D).  $TOL=10^{-4}$ .

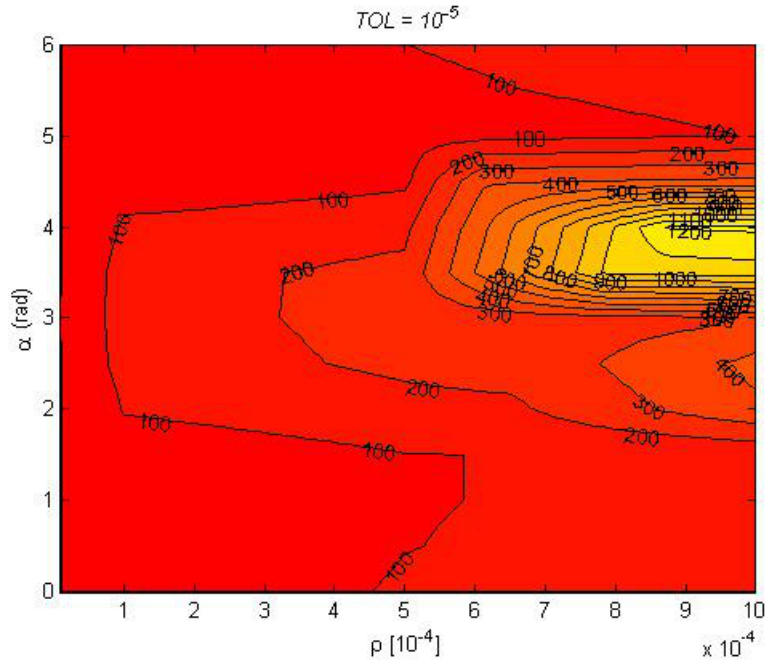


Figura 3.5.10: Mappa iso-efficienza. Sabbia densa. Stato (D). TOL= $10^{-5}$ .

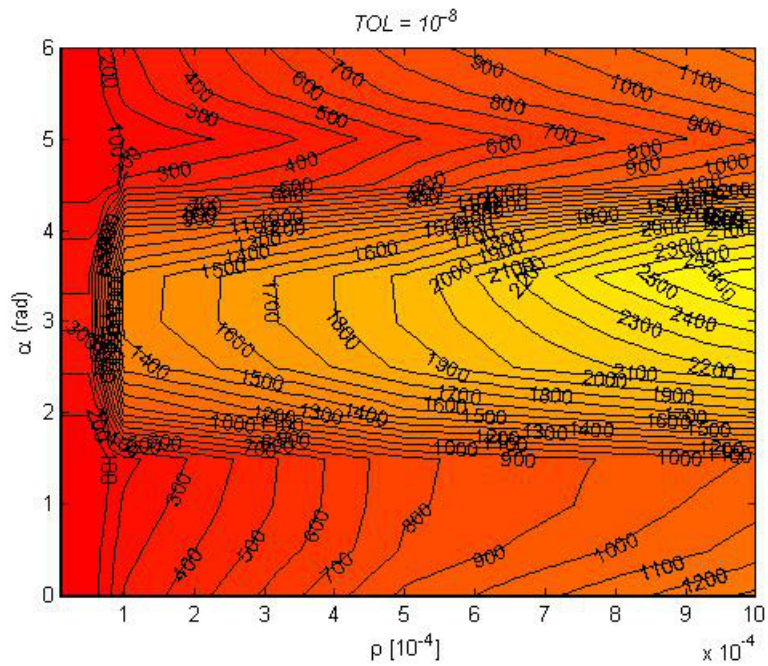


Figura 3.5.11: Mappa iso-efficienza. Sabbia densa. Stato (D). TOL= $10^{-8}$ .





## Capitolo 4

# **L'ANALISI DINAMICA**

## 4.1 EQUAZIONI CHE GOVERNANO I PROCESSI ACCOPPIATI IN CAMPO DINAMICO

### 4.1.1 Introduzione

Nel presente paragrafo sono state riportate le equazioni che descrivono i processi accoppiati di deformazione-filtrazione nei pezzi porosi in campo dinamico, derivate a partire dai principi fondamentali di conservazione della massa e della quantità di moto.

I fenomeni di carattere meccanico, come deformazioni, spostamenti, variazioni dello stato tensionale, sovrappressioni interstiziali, che si innescano a causa delle azioni sismiche nel terreno possono essere descritte sulla base dei principi della *teoria delle miscele*, formalizzata ad es. in *Lewis e Schrefler (1998)* e riportata anche nel lavoro di *Sellari (2007)*.

Nella teoria delle miscele il terreno è assimilato ad un mezzo multifase definito dalla sovrapposizione delle fasi  $\alpha$  con  $\alpha=1, \dots, k$ . Nella configurazione corrente il punto spaziale  $x$  è occupato contemporaneamente dalle tre fasi; il moto di ogni fase però è descritto indipendentemente.

Tutte le grandezze fisiche che caratterizzano lo stato sia delle singole fasi sia del mezzo multifase sono relative ad un volume caratteristico chiamato *volume elementare rappresentativo* (REV) (Figura 4.1.1).

Le caratteristiche del REV sono:

- 1) dimensioni sufficientemente grandi (rispetto alla dimensione delle particelle solide) da rendere trascurabile le oscillazioni dei valori medi delle grandezze fisiche significative, calcolati su tale volume;
- 2) dimensioni sufficientemente piccole da consentire di trattare tali valori medi alla stregua di valori locali.

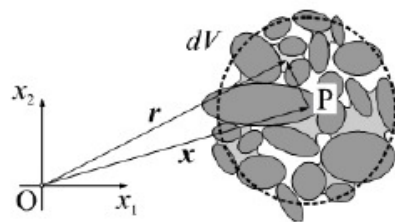


Figura 4.1.1: Volume elementare rappresentativo. (REV)

In ogni punto del mezzo è possibile definire la frazione di volume del componente  $\alpha$  come:

$$n_\alpha = \frac{dV_\alpha}{dV} \quad (4.1.1)$$

$$dV_\alpha = \int_{dV} X_\alpha(\underline{r}) dV \quad (4.1.2)$$

$$X_\alpha(\underline{r}) = 1 \quad \text{se} \quad \underline{r} \in \alpha ;$$

$$X_\alpha(\underline{r}) = 0 \quad \text{se} \quad \underline{r} \notin \alpha ;$$

$$V_\alpha = \int_V n_\alpha dV \quad (4.1.3)$$

Il volume totale è definito come la somma dei volumi occupati dai singoli costituenti:

$$V = \sum_{\alpha=1}^k V_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k \int_{dV} n_\alpha dV = \int_{dV} \sum_{\alpha=1}^k n_\alpha dV = \int_{dV} dV \quad (4.1.4)$$

$$\text{con} \quad \sum_{\alpha=1}^k n_\alpha = 1 \quad .$$

Assegnata una grandezza fisica  $\hat{q}_\alpha$  globale associata al REV (per esempio la densità), è possibile definire:

- densità intrinseca (o reale) :

$$q_\alpha = \frac{d\hat{q}_\alpha}{dV_\alpha} = \frac{1}{dV_\alpha} \int_{dV} \tilde{q}_\alpha X_\alpha(\underline{r}) dV \quad (4.1.5)$$

con  $\tilde{q}_\alpha$  densità di volume vera di  $\hat{q}_\alpha$  a livello microscopico;

- densità apparente :

$$q_\alpha = \frac{d\hat{q}_\alpha}{dV} = \frac{1}{dV} \int_{dV} \tilde{q}_\alpha X_\alpha(\underline{r}) dV \quad (4.1.6)$$

La densità intrinseca e la densità apparente del costituente  $\alpha$  sono messe in relazione tra loro da:

$$q^\alpha(\underline{x}, t) = n_\alpha(\underline{x}, t) q_\alpha(\underline{x}, t) \quad .$$

Quando  $\hat{q}_\alpha$  è la massa del costituente  $\alpha$ , si ha che:

$$\rho_\alpha = \frac{d\hat{q}_\alpha}{dV_\alpha} = \frac{1}{dV_\alpha} \int \tilde{\rho}_\alpha X_\alpha(\underline{r}) dV \quad \text{è la densità di massa intrinseca;}$$

$$\rho^\alpha = \frac{d\hat{q}_\alpha}{dV} = \frac{1}{dV} \int \tilde{\rho}_\alpha X_\alpha(\underline{r}) dV \quad \text{è la densità di massa apparente.}$$

#### 4.1.2 La teoria delle miscele

Le equazioni che descrivono il moto della miscela possono essere ricavate a partire dalle leggi della conservazione della massa, della quantità di moto e dei seguenti principi fondamentali della teoria delle miscele, sulla base delle seguenti ipotesi:

- le proprietà della miscela sono deducibili matematicamente dalle proprietà dei suoi costituenti;
- per descrivere il moto di un singolo costituente è possibile considerare quest'ultimo come idealmente isolato dal resto della miscela, purché si tengano conto delle azioni che su di esso esercitano gli altri costituenti;
- il moto della miscela è governato dalle stesse leggi che regolano il moto di un corpo continuo monofase.

Inoltre, nel seguito, sono state adottate le seguenti ipotesi restrittive:

- i processi di deformazione accoppiati delle varie fasi avvengono in condizioni isoterme;
- lo scambio di massa tra i singoli costituenti è nullo;
- lo scambio di momento della quantità di moto tra i singoli costituenti è trascurabile;
- la forza di volume esterna è solo la gravità;
- gli effetti della non linearità geometrica sono trascurabili.

### 4.1.3 Teorema del trasporto

La derivata totale dell'integrale di una grandezza  $A(\underline{x}, t)$  in un volume  $V$  che, racchiuso da una superficie  $S$ , contiene sempre le stesse particelle è data da:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} A(\underline{x}, t) dV = \int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} A(\underline{x}, t) + A(\underline{x}, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\} dV$$

### 4.1.4 Conservazione della massa per i singoli costituenti

Si consideri un arbitrario volume  $B$  della miscela delimitato da una superficie chiusa  $S$  e sia  $\alpha$  il generico costituente. La massa di  $\alpha$  contenuta in  $B$  può essere espressa dalla relazione:

$$M_\alpha = \int_B \rho^\alpha dV \quad (4.1.7)$$

Per il principio di conservazione della massa per il costituente  $\alpha$  si può scrivere la relazione:

$$\frac{dM_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \int_B \rho^\alpha dV = \int_B \left\{ \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho^\alpha v_i^\alpha}{\partial x_i} \right\} dV = 0 \quad (4.1.8)$$

$\rho^\alpha$  è la densità di massa apparente.

Stante l'arbitrarietà del volume  $B$ , vale la relazione:

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho^\alpha v_i^\alpha}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1.9)$$

Nota la relazione  $q^\alpha = n_\alpha q_\alpha$  è possibile scrivere la seguente equazione:

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial (n_\alpha \rho_\alpha v_i^\alpha)}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1.10)$$

Sapendo che

$$\frac{\partial (n_\alpha \rho_\alpha v_i^\alpha)}{\partial x_i} = n_\alpha \rho_\alpha \frac{\partial (v_i^\alpha)}{\partial x_i} + v_i^\alpha \text{grad} (n_\alpha \rho_\alpha) \quad \text{e} \quad \frac{\partial (n_\alpha \rho_\alpha)}{\partial t} + v_i^\alpha \text{grad} (n_\alpha \rho_\alpha) = \frac{d}{dt} (n_\alpha \rho_\alpha) \quad ,$$

$$\frac{d\rho^\alpha}{dt} + n_\alpha \rho_\alpha \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1.11)$$

Per i singoli costituenti, in presenza di terreno non saturo, l'equazione (4.1.10) può essere riscritta tenendo conto che:

$$n = \frac{V_v}{V} \quad , \quad S_w = S_r \quad , \quad S_g = 1 - S_r \quad ;$$

- SOLIDO  $\frac{\partial(1-n)\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial(1-n)\rho_s v_i^s}{\partial x_i} = 0 \quad ;$
- FLUIDO  $\frac{\partial S_w n \rho_w}{\partial t} + \frac{\partial S_w n \rho_w v_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad ;$
- GAS  $\frac{\partial S_g n \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial S_g n \rho_g v_i^g}{\partial x_i} = 0 \quad .$

Le equazioni possono essere scritte in forma conveniente combinando (solido + liquido e solido + gas) ottenendo:

- SOLIDO + LIQUIDO  $n \dot{S}_w + n \frac{S_w}{\rho_w} \dot{\rho}_w + S_w \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad ;$
- SOLIDO + GAS  $n \dot{S}_w + n \frac{S_w}{\rho_w} \dot{\rho}_w + S_w \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad ;$

avendo posto  $\underline{w}^w = n S_w (\underline{v}^w - \underline{v}^s)$  e  $\underline{w}^g = n S_g (\underline{v}^g - \underline{v}^s)$  rispettivamente la velocità apparente di filtrazione della fase liquida e della fase gassosa.

#### 4.1.5 Conservazione della massa della miscela

La conservazione della massa della miscela nel suo complesso deve essere uguale formalmente a quella di un corpo monofase.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1.12)$$

Prendendo le equazioni di conservazione della quantità di moto per le singole componenti e sommandole si ottiene:

$$\sum_{\alpha=1}^3 \left\{ \frac{\partial n_{\alpha} \rho_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial (n_{\alpha} \rho_{\alpha} v_i^{\alpha})}{\partial x_i} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 n_{\alpha} \rho_{\alpha} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 (n_{\alpha} \rho_{\alpha} v_i^{\alpha}) \right\} = 0 \quad (4.1.13)$$

Segue che :

- $\rho = \sum_{\alpha=1}^3 n_{\alpha} \rho_{\alpha} = (1-n) \rho_s + S_w n \rho_w + S_g n \rho_g$  - densità della miscela;
- $\underline{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^3 n_{\alpha} \rho_{\alpha} \underline{v}^{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{(n_{\alpha} \rho_{\alpha})}{\rho} \underline{v}^{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 (c^{\alpha} \underline{v}^{\alpha}) = c^s \underline{v}^s + c^w \underline{v}^w + c^g \underline{v}^g$  - velocità della miscela;
- $c^{\alpha} = \frac{\rho^{\alpha}}{\rho}$  - concentrazione di massa del costituente  $\alpha$ .

#### 4.1.6 Conservazione della quantità di moto dei singoli costituenti

La variazione della quantità di moto  $Q$  di un mezzo monofase contenuto in un volume  $V$  composto sempre delle stesse particelle è pari alla risultante delle forze delle forze esterne  $F$ .

$$\frac{d}{dt}Q = F \quad (4.1.14)$$

dove

$$\frac{d}{dt}Q = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{v} dV = \int_{V(t)} \left\{ \frac{d(\rho \underline{v})}{dt} + \rho \underline{v} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\} dV \quad (4.1.15)$$

$$\text{e } F = \int_{V(t)} \rho \underline{b} dV + \int_{S(t)} \underline{t} dS = \int_{V(t)} \left\{ \rho \underline{b} + \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \right\} dV \quad (4.1.16)$$

Considerando una miscela è possibile scrivere l'equilibrio della quantità di moto di un singolo componente  $\alpha$  purché si tenga in conto delle azioni che su di esso esercitano gli altri componenti.

Chiamata con  $\hat{\underline{p}}^\alpha$  la forza di volume trasmessa alla fase  $\alpha$  dagli altri componenti, il principio di conservazione della quantità di moto si scrive nella forma:

$$\int_{V(t)} \left\{ \frac{d(\rho^\alpha \underline{v}^\alpha)}{dt} + \rho^\alpha \underline{v}^\alpha \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_i} \right\} dV = \int_{V(t)} \left\{ \rho^\alpha \underline{b} + \hat{\underline{p}}^\alpha + \frac{\partial \sigma_i^\alpha}{\partial x_i} \right\} dV \quad (4.1.17)$$

Il 1° termine si trasforma:

$$\int_{V(t)} \left\{ \frac{d(\rho^\alpha \underline{v}^\alpha)}{dt} + \rho^\alpha \underline{v}^\alpha \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_i} \right\} dV = \int_{V(t)} \left\{ \rho^\alpha \frac{d \underline{v}^\alpha}{dt} + \underline{v}^\alpha \frac{d \rho^\alpha}{dt} + \rho^\alpha \underline{v}^\alpha \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_i} \right\} dV = \int_{V(t)} \rho^\alpha \frac{d \underline{v}^\alpha}{dt} dV$$

Sostituendo e tenendo presente l'arbitrarietà del volume  $V$ , l'equazione in forma locale diventa:

$$\rho^\alpha \left( \underline{b} - \frac{d \underline{v}^\alpha}{dt} \right) + \hat{\underline{p}}^\alpha + \frac{\partial \sigma_i^\alpha}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1.18)$$

Tenendo presente che  $\rho^\alpha = n_\alpha \rho_\alpha$ , l'equazione si può anche scrivere:

$$n_\alpha \rho_\alpha \left( \underline{b} - \frac{d \underline{v}^\alpha}{dt} \right) + \hat{\underline{p}}^\alpha + \frac{\partial \sigma_i^\alpha}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1.19)$$



Scrivendo l'equazione per ciascun componente si ottiene:

- SOLIDO: 
$$n_s \rho_s (\underline{b} - \frac{d \underline{v}^s}{dt}) + \hat{\underline{p}}^s + \frac{\partial \sigma_i^s}{\partial x_i} = 0 \quad ;$$
- LIQUIDA: 
$$n_w \rho_w (\underline{b} - \frac{d \underline{v}^w}{dt}) + \hat{\underline{p}}^w + \frac{\partial \sigma_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad ;$$
- GAS: 
$$n_g \rho_g (\underline{b} - \frac{d \underline{v}^g}{dt}) + \hat{\underline{p}}^g + \frac{\partial \sigma_i^g}{\partial x_i} = 0 \quad .$$

$\underline{\sigma}^w$  e  $\underline{\sigma}^g$  sono i tensori degli sforzi relativi alla fase liquida e gassosa e possono essere semplificati considerando solo la componente isotropa poiché le velocità di deformazione sono modeste.

$\underline{\sigma}^w = -n S_w p_w \underline{\delta}$  -  $\underline{\sigma}^g = -n S_w p_g \underline{\delta}$  (Il segno meno è presente poiché  $p_w$  è con il segno positivo di compressione mentre la convenzione usata è quella valida per la scienza delle costruzioni nella quale gli sforzi di trazione sono positivi).

#### 4.1.7 Conservazione della quantità di moto della miscela

Considerando la miscela nella sua globalità, la somma delle forze interne  $\hat{\underline{p}}^\alpha$  è nulla per definizione. Inoltre il tensore delle tensioni totali può essere ricavato come somma dei tensori delle tensioni delle tre

$$\text{fasi } \underline{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^3 \underline{\sigma}^\alpha .$$

Sommando le tre relazioni che esprimono la conservazione della quantità di moto delle tre componenti si ottiene l'espressione:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho \underline{b} - (1-n) \rho_s \underline{a}^s - S_w n \rho_w \underline{a}^w - S_g n \rho_g \underline{a}^g = 0 \quad (4.1.20)$$

avendo posto:

- $\underline{a}^s = \frac{d \underline{v}^s}{dt}$  - accelerazione totale parte solida;
- $\underline{a}^w = \frac{d \underline{v}^w}{dt}$  - accelerazione totale parte liquida;
- $\underline{a}^g = \frac{d \underline{v}^g}{dt}$  - accelerazione totale parte gassosa;
- $\rho = (1-n) \rho_s + S_w n \rho_w + S_g n \rho_g$  - densità equivalente del mezzo.

E' conveniente esprimere questa espressione esplicitando le accelerazioni relative tra la parte fluida e lo scheletro solido, perciò:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho (\underline{b} - \underline{a}^s) - S_w n \rho_w \underline{a}^{ws} - S_g n \rho_g \underline{a}^{gs} = 0 \quad (4.1.21)$$

avendo posto:

- $\underline{a}^{ws} = \underline{a}^w - \underline{a}^s$  - accelerazione relativa acqua scheletro solido;
- $\underline{a}^{gs} = \underline{a}^g - \underline{a}^s$  - accelerazione relativa gas scheletro solido.

### 4.1.8 Equazioni costitutive

#### 4.1.8.1 Equazioni costitutive per lo scheletro solido

Nelle teorie delle miscele per mezzi porosi le equazioni costitutive per lo scheletro solido sono generalmente definite come relazioni (in forma finita o incrementale) tra il tensore della deformazione  $\underline{\epsilon}$  e il tensore della tensione dello scheletro solido  $\underline{\sigma}^s$ .

In mezzi saturi ( $S_w=1$  e  $S_g=0$ ) è valido il principio delle tensioni efficaci di Terzaghi (1948) il quale stabilisce che tutti gli effetti misurabili sullo scheletro solido associabili ad una variazione delle sollecitazioni applicate dipendono solo dalla variazione delle tensioni efficaci definite come:

$$\underline{\sigma}' = \underline{\sigma} + p_w \underline{\delta} \quad (4.1.22)$$

(le componenti dei tensori della tensione totale ed efficace sono assunte positive di trazione)

Il principio delle tensioni efficaci può essere generalizzato tenendo conto della deformabilità dello scheletro solido nel seguente modo:  $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma} + \alpha p_w \underline{\delta}$

in cui  $\alpha = 1 - K_T/K_S$ , dove  $K_T$  rappresenta la rigidezza volumetrica della miscela e  $K_S$  rappresenta la rigidezza volumetrica dello scheletro solido. Nella maggior parte dei terreni  $K_S \gg K_T$  perciò  $\alpha \approx 1$ .

Per tener in conto delle caratteristiche di non linearità, irreversibilità e dipendenza dalla storia dello stato tensionale, la relazione tra stato tensionale efficace e deformazione è scritta nella forma:

$$\dot{\underline{\sigma}}' = D(\underline{\sigma}', q, \underline{\eta}) \dot{\underline{\epsilon}} \quad (4.1.23)$$

$\underline{\sigma}'$  - stato tensionale corrente,

$q$  - tensore o vettore delle variabili interne,

$\underline{\eta}$  - tensore direzione della velocità di deformazione,

$D$  - tensore (del 4° ordine) di rigidezza tangente del materiale.

Le leggi di evoluzione delle variabili interne sono espresse nella forma:

$$\dot{q} = H(\underline{\sigma}', q, \dot{\underline{\epsilon}}, \underline{\eta}) \quad (4.1.24)$$

Nel seguito è stato trattato solamente il caso di terreno saturo.

#### 4.1.8.2 Equazioni costitutive per la fase liquida

Assumendo per la fase liquida un comportamento barotropico ( $\rho_w = f(p_w)$ ), la compressibilità del liquido può essere definita dalla relazione:

$$\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} = \frac{1}{K_w} \dot{p}_w \quad (4.1.25)$$

$K_w$  = rigidità volumetrica della fase liquida.

#### 4.1.8.3 Legge di Darcy generale

##### Scheletro solido fisso

Dall'equazione di bilancio della quantità di moto della parte liquida si ottiene:

$$n_w \rho_w \left( \underline{\dot{v}} - \frac{d \underline{v}^w}{dt} \right) + \underline{\hat{p}}^w + \frac{\partial \sigma_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1.26)$$

Le forze di volume scambiate tra il fluido e le particelle solide sono dovute alla filtrazione. Il moto del fluido all'interno dei pori è supposto lineare poiché il numero di *Reynold* è prossimo all'unità. Lo sforzo esercitato dal fluido sulle pareti (e quindi l'effetto dello scheletro solido sul fluido) è funzione della sua velocità effettiva nel poro. Ipotizzando che in assenza di moto anche gli sforzi siano nulli, le forze di volume che lo scheletro solido esercita sul fluido interstiziale possono essere espresse nella forma lineare:

$$\underline{\hat{p}}^w = -n^2 Z \underline{v}^w \quad (4.1.27)$$

(il segno meno deriva dal fatto che le forze di volume si oppongono al moto del fluido).

Il tensore degli sforzi della parte fluida può essere scritto nella forma  $\underline{\sigma}^w = -n S_w p_w \underline{\delta} = -n p_w \underline{\delta}$ .

Sostituendo nella equazione di bilancio si ottiene:

$$\underline{v}^w = \frac{-1}{nZ} \left[ \text{grad}(p_w) - \rho_w \left( \underline{b} - \frac{d\underline{v}^w}{dt} \right) \right] ; \quad (4.1.28)$$

$$\underline{w}^w = \frac{-1}{Z} \left[ \text{grad}(p_w) - \rho_w \left( \underline{b} - \frac{d\underline{v}^w}{dt} \right) \right] = -k_w \left[ \text{grad}(p_w) - \rho_w \left( \underline{b} - \frac{d\underline{v}^w}{dt} \right) \right] \quad (4.1.29)$$

con  $k_w = 1/Z$  - tensore di permeabilità dello scheletro solido all'acqua.

### **Scheletro solido in moto**

La filtrazione è sempre un moto relativo di un fluido rispetto ad un altro. La velocità relativa tra le particelle di acqua e quelle dello scheletro solido è espressa dalla relazione:

$$\underline{v}^{ws} = \underline{v}^w - \underline{v}^s . \quad (4.1.30)$$

L'accelerazione relativa è:

$$\frac{d\underline{v}^{ws}}{dt} = \frac{d(\underline{v}^w - \underline{v}^s)}{dt} = \frac{d\underline{v}^w}{dt} - \frac{d\underline{v}^s}{dt} . \quad (4.1.31)$$

Le forze di volume scambiate tra il fluido e le particelle solide sono dovute alla filtrazione e quindi alla velocità relativa tra il fluido e lo scheletro solido.

$$\hat{\underline{p}}^w = -n^2 Z \underline{v}^{ws} \quad (4.1.32)$$

Scrivendo l'equazione di bilancio della quantità di moto:

$$\frac{d}{dt} Q = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho^w \underline{v}^w dV = \int_{V(t)} \left\{ \rho^w \underline{b} + \hat{\underline{p}}^w + \frac{\partial \sigma_i^w}{\partial x_i} \right\} dV \quad (4.1.33)$$

e svolgendo i passaggi si ottiene:

$$\underline{v}^{ws} = -k_w \left[ \text{grad}(p_w) - \rho_w \left( \underline{b} - \frac{d\underline{v}^w}{dt} \right) \right] = -k_w \left[ \text{grad}(p_w) - \rho_w \left( \underline{b} - \frac{d\underline{v}^s}{dt} - \frac{d\underline{v}^{ws}}{dt} \right) \right] . \quad (4.1.34)$$

#### 4.1.9 Formulazione generale: Riepilogo delle equazioni ( $S_r=1$ )

Il sistema di equazioni differenziali che controlla nello spazio e nel tempo l'evoluzione dello scheletro solido e del fluido interstiziale è:

$$\frac{n}{K_w} \dot{p}_w + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad - \text{conservazione della massa;} \quad (4.1.35)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho (\underline{b} - \underline{a}^s) - n \rho_w \underline{a}^{ws} = 0 \quad - \text{conservazione della quantità di moto;} \quad (4.1.36)$$

$$\underline{w}^w = -k_w [\text{grad}(p_w) - \rho_w (\underline{b} - \frac{d\underline{v}^w}{dt})] \quad - \text{legge di Darcy generalizzata;} \quad (4.1.37)$$

$$\underline{\dot{\sigma}}' = D(\underline{\sigma}', \underline{q}, \underline{\dot{\epsilon}}, \underline{\eta}) \underline{\dot{\epsilon}} \quad - \text{legame costitutivo;} \quad (4.1.38)$$

$$\underline{\dot{q}} = H(\underline{\sigma}', \underline{q}, \underline{\dot{\epsilon}}, \underline{\eta}) \quad - \text{legge di incrudimento;} \quad (4.1.39)$$

$$\epsilon_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right) \quad - \text{tensore incremento di deformazioni dello scheletro solido (regime di piccoli spostamenti).} \quad (4.1.40)$$

In generale è possibile risolverlo in forma numerica, per esempio con il metodo agli elementi finiti, avendo assegnato opportune condizioni al contorno. In molti casi è possibile semplificare considerevolmente le equazioni tenendo opportunamente conto del campo di frequenze caratteristiche della sollecitazione applicata.

##### 4.1.9.1 Processi estremamente lenti (ESP)

In questo caso la velocità di variazione delle sollecitazioni applicate è talmente bassa che nelle equazioni di bilancio, tutti i termini che presentano la derivata rispetto al tempo possono essere trascurati. Queste sono le condizioni che prendono il nome di “condizioni drenate” (DP, Drained Process). Le equazioni di bilancio diventano:

$$\frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad (4.1.41)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho \underline{b} = 0 \quad ; \quad (4.1.42)$$

$$\underline{w}^w = -k_w [\text{grad}(p_w) - \rho_w \underline{b}] \quad ; \quad (4.1.43)$$

$$\dot{\underline{\sigma}}' = D(\underline{\sigma}', \underline{q}, \underline{\eta}) \dot{\underline{\epsilon}} \quad ; \quad (4.1.44)$$

$$\dot{\underline{q}} = H(\underline{\sigma}', \underline{q}, \dot{\underline{\epsilon}}, \underline{\eta}) \quad ; \quad (4.1.45)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right) \quad . \quad (4.1.46)$$

#### 4.1.9.2 Processi lenti (SSP)

I fenomeni transitori sono sufficientemente lenti da poter trascurare i termini inerziali ( $\underline{a} = 0$ ). Le equazioni governanti che descrivono i processi di consolidazione accoppiata sono:

$$\frac{n}{K_w} \dot{p}_w + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad (4.1.47)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho \underline{b} = 0 \quad ; \quad (4.1.48)$$

$$\underline{w}^w = -k_w [\text{grad}(p_w) - \rho_w \underline{b}] \quad ; \quad (4.1.49)$$

$$\dot{\underline{\sigma}}' = D(\underline{\sigma}', \underline{q}, \underline{\eta}) \dot{\underline{\epsilon}} \quad ; \quad (4.1.50)$$

$$\dot{\underline{q}} = H(\underline{\sigma}', \underline{q}, \dot{\underline{\epsilon}}, \underline{\eta}) \quad ; \quad (4.1.51)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right) \quad . \quad (4.1.52)$$

#### 4.1.9.3 Processi di media velocità (MSP)

La frequenza di applicazione dei carichi è sufficientemente elevata da rendere non trascurabili le forze di inerzia ma non abbastanza per poter distinguere le accelerazioni della fase solida da quelle della fase liquida ( $\underline{a}^s = 0$ ). Inoltre alla luce delle incertezze legate alla determinazione del coefficiente di permeabilità all'acqua del mezzo è possibile trascurare i termini inerziali nell'equazione di Darcy. Il problema è descritto dalle equazioni descritte nel seguito con due incognite fondamentali: il campo di spostamenti dello scheletro solido  $\underline{u}^s$  e la pressione del liquido  $p_w$ .

$$\frac{n}{K_w} \dot{p}_w + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 ; \quad (4.1.53)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho (\underline{b} - \underline{a}^s) = 0 ; \quad (4.1.54)$$

$$\underline{w}^w = -k_w [\text{grad}(p_w) - \rho_w \underline{b}] ; \quad (4.1.55)$$

$$\dot{\underline{\sigma}}' = D(\underline{\sigma}', \underline{q}, \underline{\epsilon}) \underline{\epsilon} ; \quad (4.1.56)$$

$$\dot{\underline{q}} = H(\underline{\sigma}', \underline{q}, \underline{\epsilon}, \underline{\eta}) \quad (4.1.57)$$

$$\epsilon_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right) \quad (4.1.58)$$

#### 4.1.9.4 Processi rapidi (HSP)

Le incognite fondamentali del problema dinamico accoppiato sono:

- $\underline{u}^s$  - campo di spostamenti dello scheletro solido;
- $\dot{\underline{u}}^w = \underline{v}^s + \frac{\underline{w}^w}{n}$  - campo di velocità del fluido interstiziale;
- $p_w$  - il campo di pressioni interstiziali.

Le equazioni sono uguali a quelle riportate all'inizio:

$$\frac{n}{K_w} \dot{p}_w + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 ; \quad (4.1.59)$$



$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho (\underline{b} - \underline{a}^s) - n \rho_w \underline{a}^{ws} = 0 \quad ; \quad (4.1.60)$$

$$\underline{w}^w = -k_w \left[ \text{grad}(p_w) - \rho_w \left( \underline{b} - \frac{d\underline{v}^w}{dt} \right) \right] \quad ; \quad (4.1.61)$$

$$\dot{\underline{\sigma}}' = D(\underline{\sigma}', \underline{q}, \underline{\eta}) \underline{\epsilon} \quad ; \quad (4.1.62)$$

$$\dot{\underline{q}} = H(\underline{\sigma}', \underline{q}, \underline{\epsilon}, \underline{\eta}) \quad ; \quad (4.1.63)$$

$$\epsilon_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right) \quad . \quad (4.1.64)$$

#### 4.1.9.5 Processi estremamente rapidi: condizioni non drenate (UP)

Il moto relativo tra la fase liquida e la fase solida è trascurabile ( $\underline{w}^w = \underline{a}^{ws} = 0$ ). Si parla in questo caso di “condizioni non drenate” (UP, undrained process). Sebbene si possano condurre analisi di processi non drenati in tensioni totali con leggi costitutive formulate ad hoc, è comunque possibile continuare ad usare leggi costitutive formulate in tensioni efficaci con alcuni accorgimenti.

E' necessario infatti assumere che:

- la deformazione di volume dello scheletro solido sia nulla,
- la deformazione totale della miscela satura sia attribuibile solo alla compressibilità dell'acqua.

Tenendo presente l'equazione di congruenza ( $\frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} = \text{tr} \underline{\epsilon}$ ) e il legame costitutivo della fase fluida, l'equazione di continuità si trasforma nella relazione:

$$\dot{p}_w = \frac{-K_w}{n} \text{tr} \underline{\epsilon} \quad . \quad (4.1.65)$$

Il legame tra le tensioni totali e le deformazioni dello scheletro solido diventa:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \overline{D}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (4.1.66)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}' - \dot{p}_w = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} + p_w \delta_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} + \delta_{ij} \frac{K_w}{n} \delta_{kl} \epsilon_{kl} = \left( D_{ijkl} + \delta_{ij} \frac{K_w}{n} \delta_{kl} \right) \epsilon_{kl} \quad (4.1.67)$$

$$\overline{D}_{ijkl} = (D_{ijkl} + \delta_{ij} \frac{K_w}{n} \delta_{kl}) \quad (4.1.68)$$

Le equazioni diventano:

$$\dot{p}_w = \frac{-K_w}{n} tr \dot{\underline{\epsilon}} \quad ; \quad (4.1.69)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho (\underline{b} - \underline{a}^s) = 0 \quad ; \quad (4.1.70)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \overline{D}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad ; \quad (4.1.71)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right) \quad ; \quad (4.1.72)$$

con lo spostamento  $\mathcal{U}^s$  incognita primaria.

## 4.2 CAMPO DI APPLICABILITÀ DEI DIVERSI APPROCCI

Uno studio parametrico condotto da *Zienkiewicz et al. (1980)* ha avuto come obiettivo quello di individuare i limiti di applicabilità dei diversi approcci. I principali risultati di tale studio sono stati sintetizzati in seguito. Il problema preso in esame è stato riferito ad uno strato di terreno omogeneo, elastico lineare e sottoposto ad un carico uniforme infinitamente esteso e variabile con il tempo con legge sinusoidale di ampiezza  $\bar{q}$  e frequenza angolare  $\omega$ .

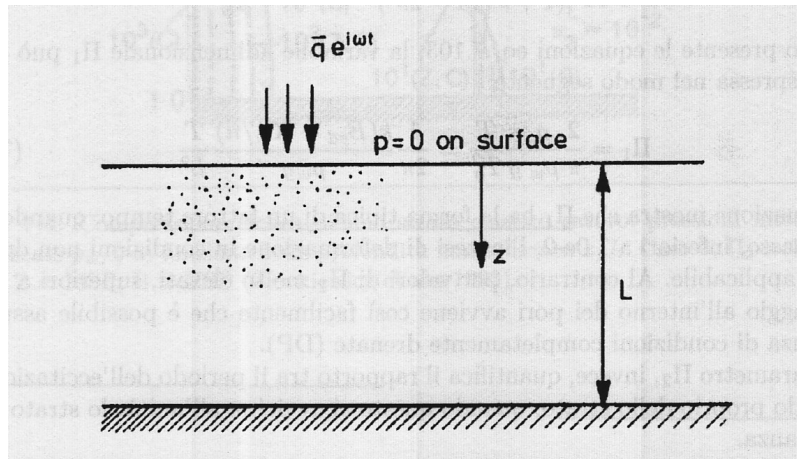


Figura 4.2.1: Problema preso in esame da *Zienkiewicz et al. (1980)*

Le analisi sono state condotte risolvendo in forma chiusa i sistemi di equazioni che governano i problemi SSP, MSP, HSP e UP. In particolare gli Autori hanno mostrato che la risposta del sistema alla sollecitazione applicata dipende dai valori assunti dalle 5 grandezze adimensionali:

$$\Pi_1 = \frac{2}{\pi} \frac{\rho}{\rho_w} \frac{k_w}{g} \frac{T}{T_0^2} ; \quad (4.2.1)$$

$$\Pi_2 = \pi^2 \frac{T_0^2}{T} ; \quad (4.2.2)$$

$$\beta = \frac{\rho_w}{\rho} ; \quad (4.2.3)$$

$$n = n_w ; \quad (4.2.4)$$

$$k = \frac{K_w}{n_w E_{ed} + K_w} , \quad (4.2.5)$$

dove  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  è il periodo della sollecitazione applicata,

$T_0 = \frac{2L}{v_p}$  è il periodo proprio dello strato elastico,

$v_p = \sqrt{\frac{E_{ed} + K_w/n}{\rho}}$  è la velocità di propagazione delle onde di compressione,

$k_w$  è la permeabilità del terreno all'acqua,

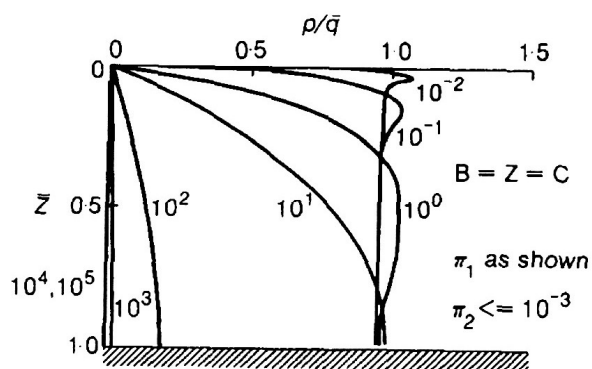
$K_w$  è la rigidità volumetrica dell'acqua.

Lo studio è stato condotto fissando i parametri  $\beta$ ,  $n$  e  $k$  rispettivamente ai valori 0.973, 0.333 e 0.333 ma soluzione è indipendente dal loro valore esatto.

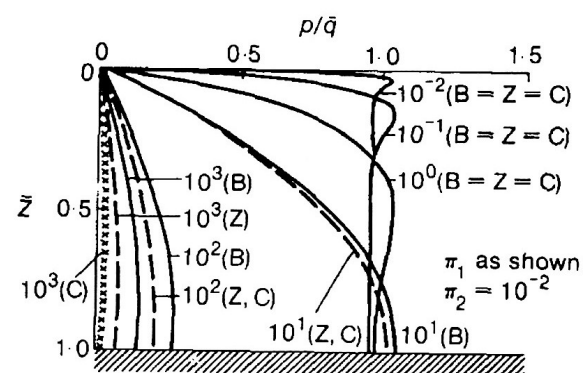
Il parametro  $\Pi_1$  può essere visto come un fattore tempo trasformandolo nella seguente espressione:

$$\Pi_1 = \frac{2}{\pi} \frac{\rho}{\rho_w} \frac{k_w}{g} \frac{T}{T_0^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{k_w (E_{ed} + K_w/n)}{\rho_w g} \frac{T}{L^2} . \quad (4.2.6)$$

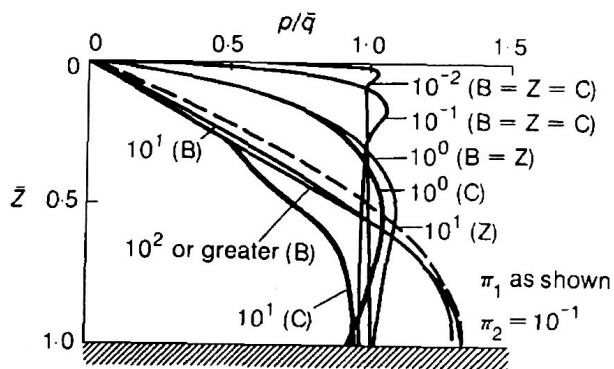
Sono stati riportati in figura alcuni grafici che mostrano la variazione delle pressioni interstiziali nello strato al per alcuni valori di  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ .



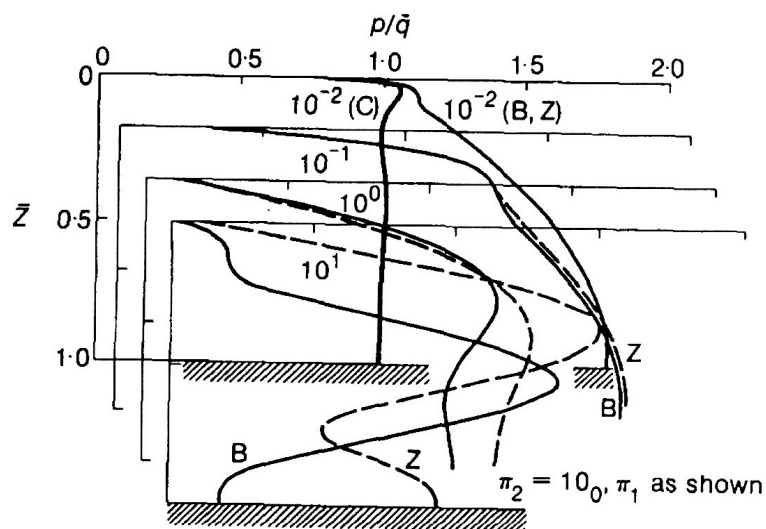
(a)



(b)



(c)



(d)

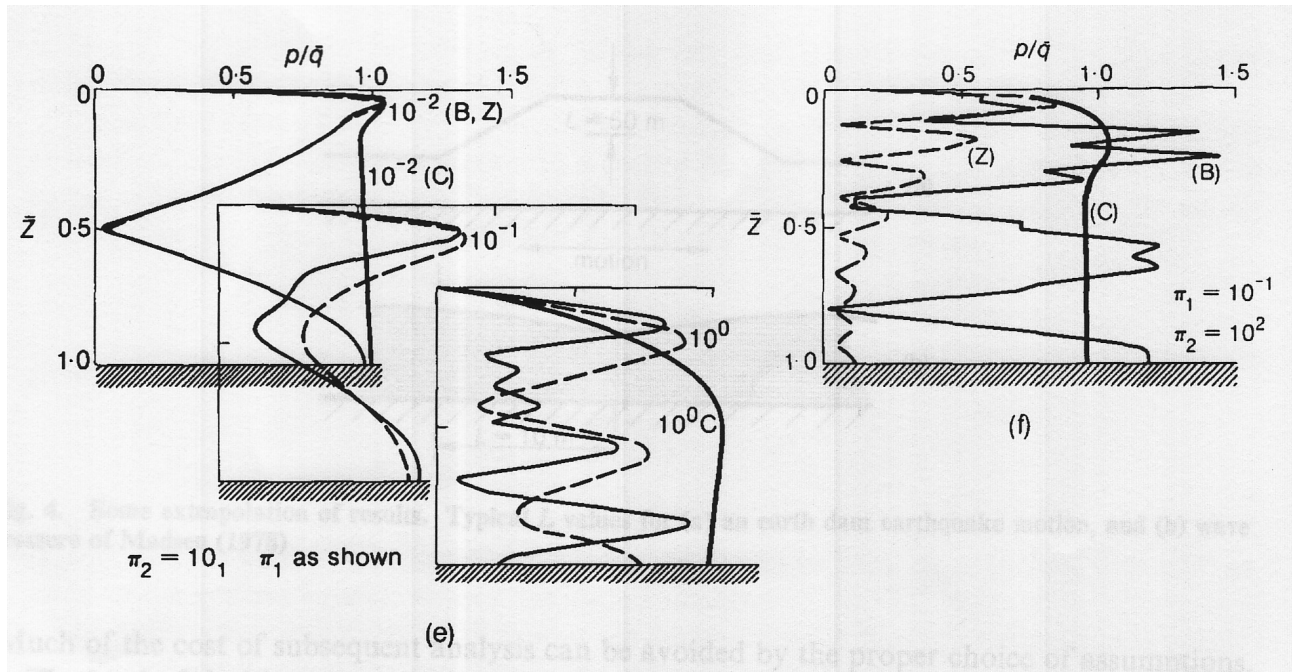


Figura 4.2.2: Variazione della pressione interstiziale con la profondità per diversi valori di  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ . I parametri  $\beta$ ,  $n$  e  $k$  sono pari a 0.973, 0.333 e 0.333.

In Errore: sorgente del riferimento non trovata è possibile notare che, per valori molto bassi di  $\Pi_1$  (inferiori a  $10^{-2}$ ), l'ipotesi di condizioni non drenate (UP) è applicabile; al contrario per valori superiori a  $10^2$  è valida l'ipotesi di condizioni drenate (DP).

Il parametro  $\Pi_2$  quantifica il rapporto tra il periodo proprio dello strato e il periodo dell'oscillazione; quando questo rapporto tende all'unità lo strato entra in risonanza. Per un valore di  $T$  molto piccolo rispetto al periodo proprio dello strato ( $\Pi_2 \leq 10^3$ ), tutte le soluzioni risultano praticamente coincidenti tra loro. Aumentando  $\Pi_2$  le soluzioni dinamiche tendono ad essere ancora coincidenti soltanto se il parametro  $\Pi_1$  rimane contenuto, mentre possono differire anche significativamente per carichi con bassa frequenza.

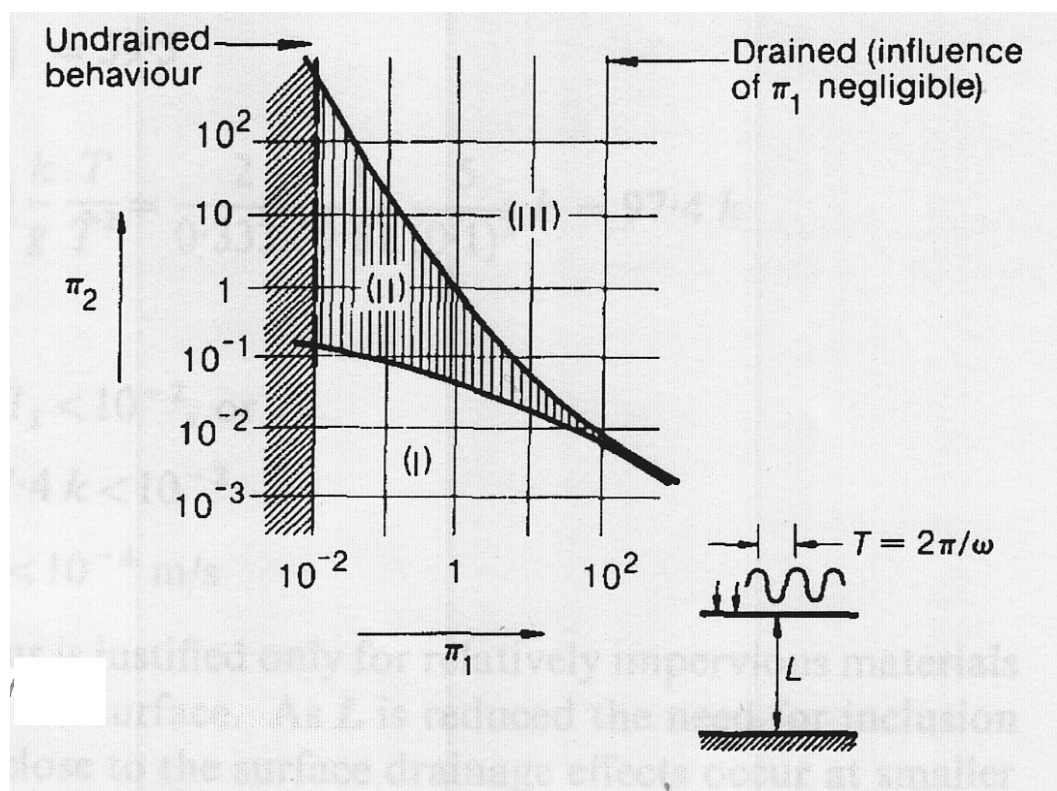


Figura 4.2.3: Zone di applicabilità delle diverse assunzioni.

Nella zona (I) i fenomeni sono talmente lenti che possono essere descritti in modo sufficientemente accurato dalle equazioni della consolidazione accoppiata (approssimazione SSP). Le soluzioni fornite dagli approcci SSP, MSP e HSP sono tutte tra loro coincidenti.

Nella zona (II) rappresenta il campo dei fenomeni di velocità media per i quali gli effetti dinamici non sono trascurabili. Le soluzioni proposte dall'approssimazione MSP forniscono gli stessi risultati dell'approccio rigoroso (HSP).

Nella zona (III) i processi sono talmente rapidi che l'unico approccio possibile è quello rigoroso (HSP).

Ai fini della modellazione numerica del comportamento dinamico delle fondazioni miste, l'attenzione è stata rivolta alle formulazioni agli elementi finiti degli approcci HSP, MSP e UP, le cui implementazioni numeriche sono state dettagliatamente descritte nel capitolo successivo e nell'Appendice.





## Capitolo 5

# **RISOLUZIONE NUMERICA DELL'EQUAZIONE DEL MOTO**

## 5.1. INTRODUZIONE

I modelli costitutivi descritti nel Capitolo 2 sono stati sviluppati nell'ambito della plasticità ad incrudimento cinematico. Essi forniscono una legge di evoluzione delle variabili di stato a partire da uno stato iniziale noto. Gli effetti indotti da un carico esterno o da uno spostamento imposto richiedono l'integrazione delle equazioni costitutive lungo un percorso di carico e a partire da assegnate condizioni iniziali. La soluzione di questo problema non è ottenibile in forma chiusa, ad eccezione di casi particolari, perciò in generale è necessario implementare le equazioni costitutive in forma incrementale per risolverle avvalendosi di un metodo numerico, ad es. il metodo degli elementi finiti.

In Appendice, per il metodo agli elementi finiti, sono state illustrate le modalità di trasformazione del sistema di equazioni differenziali (che descrive il problema statico/dinamico per le formulazioni HSP, MSP e UP descritte nel Capitolo 4) in un sistema di equazioni algebriche.

In questo capitolo invece sono state descritte le tecniche di integrazione nel tempo del sistema di equazioni algebriche, con particolare riferimenti al metodo di Eulero all'indietro e il metodo di Newmark: il primo utilizzato dal codice di calcolo Tochnog Professional e il secondo utilizzato dal codice FEI (UCDavis, California). Infine ne è stata messa in luce la stabilità e accuratezza, condizione necessaria per l'affidabilità dei risultati delle analisi al finito nel loro complesso.

## 5.2. METODI DI SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DINAMICHE DEL MOTO

### 5.2.1. Il metodo di Eulero all'indietro (BWE)

Il metodo utilizzato per risolvere per via numerica i sistemi di equazioni differenziali lineari in Tochnog è il metodo di Eulero all'indietro.

Utilizzando l'espansione in serie di Taylor e fermandosi al 1° ordine, si ottiene:

$$y_{n+1} = y_n + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_n dt \quad (5.2.1)$$

Nel metodo di Eulero all'indietro si approssima la derivata della funzione  $f$  rispetto a  $t$  calcolata all'istante  $n$  con quella calcolata all'istante  $n+1$ . Quindi è possibile scrivere:

$$y_{n+1} \approx y_n + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{n+1} dt \quad (5.2.2)$$

L'obiettivo principale è quello di valutare l'accuratezza e la stabilità del metodo con particolare attenzione alla soluzione della equazione differenziale del moto per un oscillatore elementare.

L'equazione che descrive il moto di un oscillatore elementare è una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine. Per risolvere il problema con il metodo di Eulero all'indietro è necessario scrivere un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine.

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial t} &= y_2 \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} &= -\omega^2 y_1 \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Il sistema può essere scritto in forma matriciale:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = J \bar{y} \quad (5.2.4)$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (5.2.5)$$

E' possibile quindi riscrivere l'espressione :

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + dt \bar{f}_{n+1} = \bar{y}_n + dt \bar{J} \bar{y}_{n+1} \quad (5.2.6)$$

$$\bar{y}_{n+1} = \frac{\bar{y}_n}{(\bar{I} - dt \bar{J})} \quad (5.2.7)$$

se si considera la soluzione  $\bar{y}_n$  funzione delle grandezze riferite al passo precedente si ottiene sempre:

$$\bar{y}_n = \frac{\bar{y}_{n-1}}{(\bar{I} - dt \bar{J})} \quad (5.2.8)$$

quindi la soluzione  $\bar{y}_{n+1}$  funzione di  $\bar{y}_{n-1}$  :

$$\bar{y}_{n+1} = \frac{\bar{y}_{n-1}}{(\bar{I} - dt \bar{J})^2} \quad (5.2.9)$$

Se si riferisce la soluzione  $\bar{y}_{n+1}$  in funzione delle grandezze iniziali  $\bar{y}_0$  , si ottiene la relazione:

$$\bar{y}_{n+1} = \frac{\bar{y}_0}{(\bar{I} - dt \bar{J})^{n+1}} \quad (5.2.10)$$

Nella figura 5.2.1 è stata illustrato il confronto tra le oscillazioni libere (di un sistema caratterizzato da periodo T) calcolate con Tochnog e con l'equazione (5.2.10) implementata in EXCEL, entrambi utilizzando lo stesso passo temporale  $dt$ .

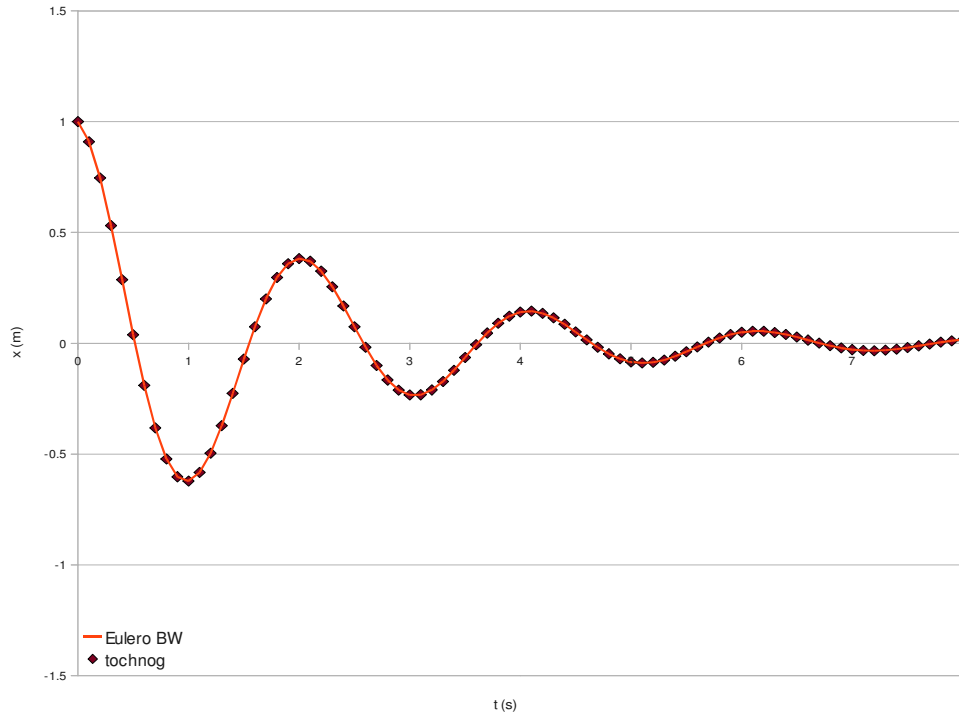


Figura 5.2.1: Confronto tra soluzione ottenuta con Tochnog e quella ottenuta dal metodo di Eulero all'indietro implementato in EXCEL. Parametro  $dt/T = 0,05$ .

### 5.2.2. Il metodo di Newmark

Il metodo di integrazione numerica nel tempo di *Newmark* è implementato nel codice di calcolo FEI (UCDavis, California). Tale metodo utilizza due parametri  $\beta$  e  $\gamma$  per la discretizzazione nel tempo delle equazioni del moto.

Detto  $u$  il vettore delle incognite generalizzate, il valore di questo vettore, al generico passo  $n+1$ , può essere ricavato a partire da grandezze al passo  $n$  e  $n+1$  tramite le seguenti equazioni:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_n + \beta \ddot{u}_{n+1} \right] \quad (5.2.11)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{u}_n + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1} \quad (5.2.12)$$

In generale il metodo è implicito, ad eccezione della condizione  $\gamma = \beta = 0$ .

Ci sono diverse implementazioni del metodo di *Newmark*, una delle quali utilizza l'approccio *predictor-corrector*. Questo approccio segue la strategia:

- calcola le quantità di previsione

$$\tilde{u}_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_n \right] \quad (5.2.13)$$

$$\tilde{\dot{u}}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{u}_n \quad (5.2.14)$$

- aggiorna le quantità “previste” per ottenere l'esatto valore di  $u_{n+1}$  e  $\dot{u}_{n+1}$  dalle relazioni

$$u_{n+1} = \tilde{u}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} \quad (5.2.15)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \tilde{\dot{u}}_{n+1} + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1} \quad (5.2.16)$$

- La quantità  $\ddot{u}_{n+1}$  può essere calcolata

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}) \quad (5.2.17)$$

- Si sostituisce tutto nella equazione di equilibrio dinamico espressa in funzione del residuo e si determina la quantità  $u_{n+1}$  tale per cui  $r=0$

$$0 = r = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M(u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}) - f^{ext}(u_{n+1}, t_{n+1}) + f^{int}(u_{n+1}) \quad (5.2.18)$$

### 5.3. LA STABILITÀ DEL METODO DI INTEGRAZIONE

Si consideri un processo governato da una equazione evolutiva (equazione del moto o conduzione di calore). Sia  $d_A(t)$  la soluzione dell'equazione differenziale con le condizioni al contorno  $d_A(0) = d_A^0$ . Considerando ora la soluzione  $d_B(t)$  relativa alla condizione al contorno  $d_B^0$  molto vicina alla condizione  $d_A^0$  tale che

$$|d_A^0 - d_B^0| \leq \epsilon \quad (5.3.1)$$

una soluzione si definisce stabile se per tutte le condizioni iniziali che soddisfano l'equazione (5.3.1), le soluzioni soddisfano:

$$|d_A(t) - d_B(t)| \leq C \epsilon \quad (5.3.2)$$

con  $C$  una costante arbitraria.

La definizione di stabilità appena riportata è chiamata stabilità fisica, cioè la stabilità delle soluzioni del modello fisico. La stabilità numerica invece riguarda la stabilità del metodo numerico di integrazione. Instabilità fisiche sono instabilità che riguardano la soluzione del modello fisico indipendentemente dalla discretizzazione numerica. Instabilità numerica invece si verificano a seguito della discretizzazione del modello. Generalmente la stabilità numerica è esaminata per processi che sono fisicamente stabili.

Una procedura numerica è stabile se una perturbazione piccola delle condizioni iniziali produce cambiamenti piccoli nella soluzione. Di conseguenza la stabilità del metodo di integrazione può essere valutata esaminando la matrice di amplificazione del metodo (definita sotto) e il raggio spettrale della matrice di amplificazione.

### 5.3.1. La stabilità del metodo di Eulero all'indietro (BWE)

L'espressione della matrice di amplificazione può essere ricavata dalla seguente espressione:

$$\bar{y}_{n+1} = \frac{\bar{y}_n}{\bar{I} - dt \bar{J}} = A \bar{y}_n \quad (5.3.3)$$

Il vettore  $\bar{y}_{n+1}$  rappresenta la risposta del sistema al tempo  $t=t_{n+1}$  e il vettore  $\bar{y}_n$  rappresenta la risposta del sistema al tempo  $t=t_n$ . La matrice  $A$  è chiamata matrice di amplificazione.

Il raggio spettrale è definito come il massimo autovalore della matrice di amplificazione:

$$\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|) \quad (5.3.4)$$

E' possibile dimostrare che la soluzione è stabile se il raggio spettrale della matrice di amplificazione è minore dell'unità.  $\rho(A) \leq 1$  (Hughes, 1987).

La matrice di amplificazione può essere scritta nella forma:

$$A = (\bar{I} - dt \bar{J})^{-1} = \frac{1}{1 + \omega^2 dt^2} \begin{bmatrix} 1 & dt \\ -\omega^2 dt & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

Il polinomio caratteristico assume la seguente forma:

$$1 - 2\lambda + \lambda^2(1 + dt^2 \omega^2) = 0 \quad (5.3.6)$$

$$a - 2a\lambda + \lambda^2 = 0 \quad \text{con}$$

$$a = \frac{1}{(1 + dt^2 \omega^2)} = \frac{1}{(1 + \Omega^2)} > 0 \quad \text{e } a < 1.$$

Le due radici sono complesse coniugate poiché  $\Delta = 4a(a-1) < 0$ .

Il raggio spettrale  $\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ .

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a}, \quad \rho(A) = |\lambda_1| = |\lambda_2|.$$

Risolviendo l'equazione e ricavando il modulo dell'autovalore complesso  $\lambda$ , si ottiene l'espressione del raggio spettrale:

$$\rho(A) = \frac{1}{(1+\Omega^2)} \sqrt{1+\Omega^2} = \frac{1}{1+4\pi^2(\frac{dt}{T})^2} \sqrt{1+4\pi^2(\frac{dt}{T})^2} \quad (5.3.7)$$

Il raggio spettrale (5.3.7) è sempre minore dell'unità e quindi il metodo è sempre stabile.

### 5.3.2. La stabilità del metodo di Newmark

Considerazioni analoghe a quelle descritte nel paragrafo precedente possono essere svolte per determinare la stabilità del metodo di Newmark (*Hughes, 1987*).

E' possibile riassumere le condizioni di stabilità come segue:

*Incondizionatamente Stabile*                      se     $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$

*Condizionatamente Stabile*                      se             $\gamma \geq 1/2$  ,     $\beta < \gamma/2$  ,

$$\Delta t/T \leq \Omega_{crit} \quad \Omega_{crit} = (\gamma/2 - \beta)^{-1/2}$$



## 5.4. COMPORTAMENTO AD ALTE FREQUENZE

Le forme modali ad alta frequenza ottenute dalla discretizzazione spaziale delle equazioni, in generale non rappresentano il comportamento del problema originale. Per ovviare a questo problema è opportuno che la risposta di questi modi sia filtrata nelle analisi transitorie.

Per studiare questo aspetto è opportuno prendere in considerazione il raggio spettrale.

Se  $\rho(A) < 1$ ,  $A^n$  decresce come  $\rho^n(A)$ . Quindi più vicino è  $\rho(A)$  ad 1 e minore è il tasso di decrescita. Se si desidera che le alte frequenze siano smorzate,  $\rho(A)$  deve essere strettamente minore dell'unità per questi modi. Per questa ragione, diagrammando  $\rho(A)$  in funzione di  $dt/T$ , si deve avere un raggio spettrale basso per questi modi.

L'algoritmo di Eulero all'indietro (BWE), incondizionatamente stabile, consente di scegliere un  $dt$  sufficientemente piccolo per i modi di vibrare con bassa frequenza ma grande per quelli ad alta frequenza. Questo aspetto non risulta un problema poiché l'annullamento del raggio spettrale per frequenze elevate ( $\rho(A) \rightarrow 0$  per  $dt/T \rightarrow +\infty$ ) tende ad escludere i modi ad alta frequenza. In figura 5.4.1 è stato rappresentato il confronto tra il raggio spettrale ottenuto dal metodo di Newmark (linee continue) e dal metodo di Eulero all'indietro (linea tratteggiata). Per quest'ultimo metodo il raggio spettrale assume valori pari all'unità per rapporti  $dt/T$  minori di  $2 \cdot 10^{-2}$  ma decresce repentinamente fino ad annullarsi per rapporti superiori a 1.

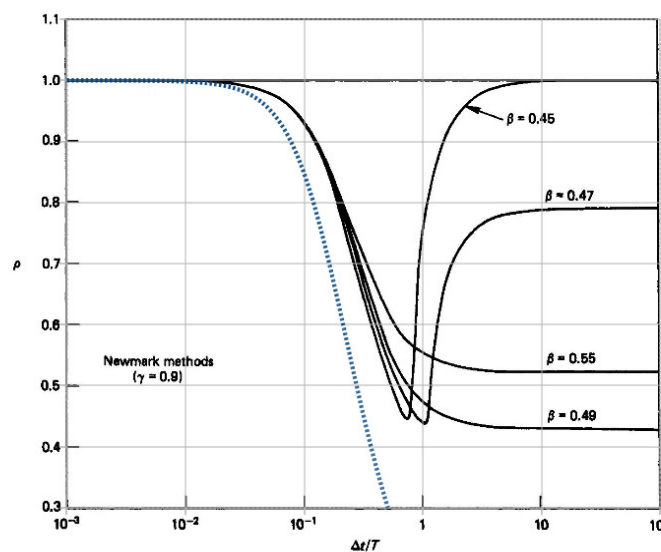


Figura 5.4.1: Raggio spettrale. Confronto con il metodo di Newmark

## 5.5. L'ACCURATEZZA DEL METODO DI INTEGRAZIONE

In un sistema lineare non smorzato l'effetto indotto dall'integrazione numerica (con i metodi BWE e Newmark) induce una riduzione progressiva delle ampiezze e un aumento del periodo di oscillazione rispetto al caso non smorzato (Figura 5.5.1). Questo aspetto dipende non solo dai parametri di ciascun metodo (ad esempio  $\gamma$  e  $\beta$  per il metodo di Newmark) ma anche dal rapporto tra passo temporale  $dt$  e periodo  $T$  della forma modale a cui si fa riferimento.

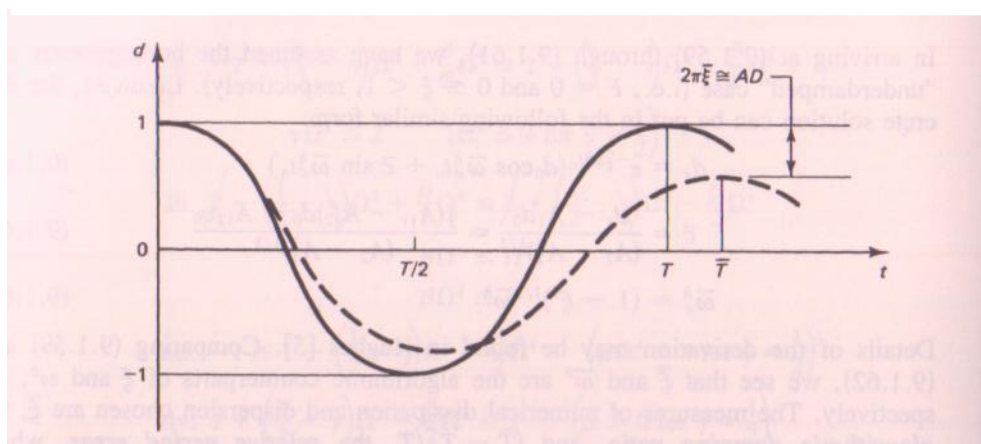


Figura 5.5.1: Variazione dell'ampiezza e del periodo dovute allo smorzamento numerico indotto dalla tecnica di integrazione dell'equazione del moto.

### 5.5.1. Lo smorzamento nel metodo BWE

Per valutare l'entità dello smorzamento numerico indotto durante una analisi al passo è stata studiata la risposta di un oscillatore elastico lineare privo di smorzamento avente all'istante iniziale una velocità nulla e uno spostamento unitario (Figura 5.5.2).

Lo smorzamento numerico è stato ricavato facendo sovrapporre la risposta di un oscillatore elastico lineare smorzato alla risposta ottenuta con Tochnog fissando il parametro  $dt/T$ , come illustrato in figura 5.5.3 e 5.5.4. Per queste analisi è stato considerato un oscillatore elementare avente le seguenti caratteristiche: massa pari a  $1\text{Mg}$ , rigidezza flessionale  $(EI)$  pari a  $\pi^2 \text{ kNm}^2$  e lunghezza  $(L)$  pari a  $1\text{m}$ . I risultati dello smorzamento e dell'elongazione del periodo sono stati rappresentati nelle figure 5.5.5, 5.5.6, 5.5.7 e 5.5.8.

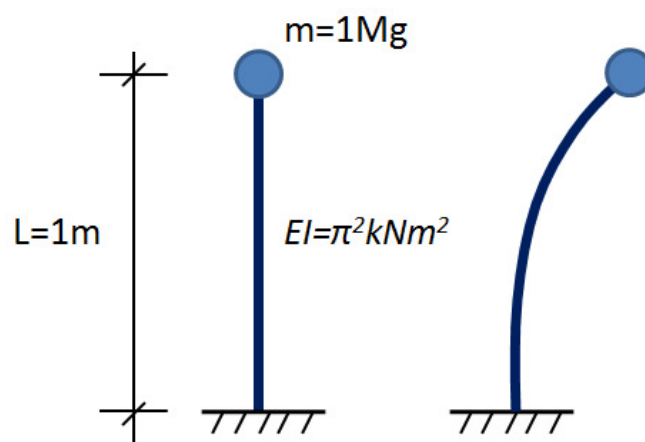


Figura 5.5.2: Oscillatore elementare per valutazione lo smorzamento numerico nel metodo BWE.

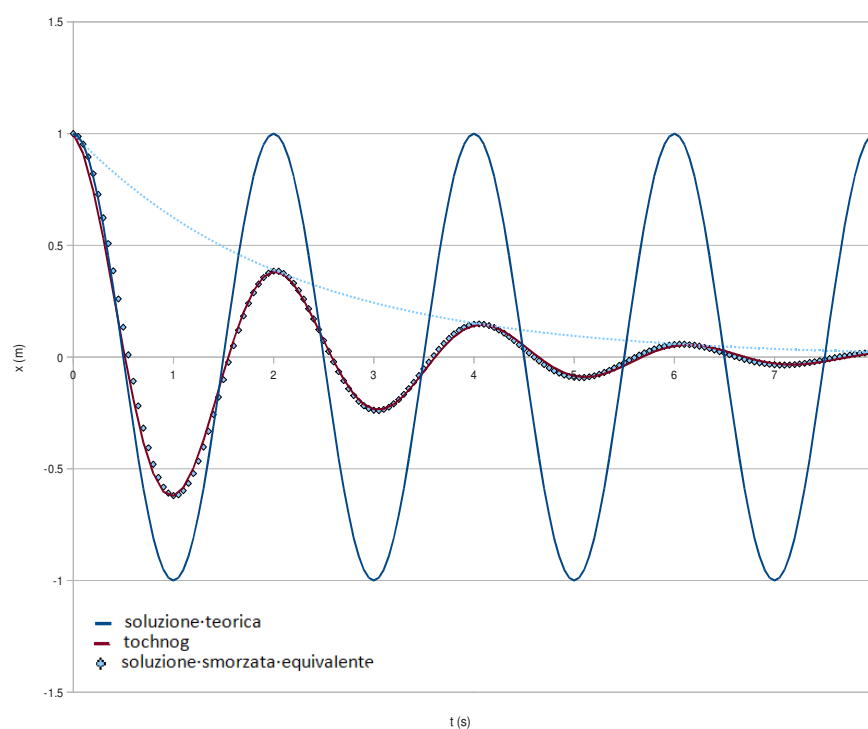


Figura 5.5.3: Confronto tra soluzione teorica, soluzione ottenuta con Tochnog e soluzione teorica smorzata equivalente avente uno smorzamento  $\xi=15\%$ . Parametro  $dt/T=0.05$

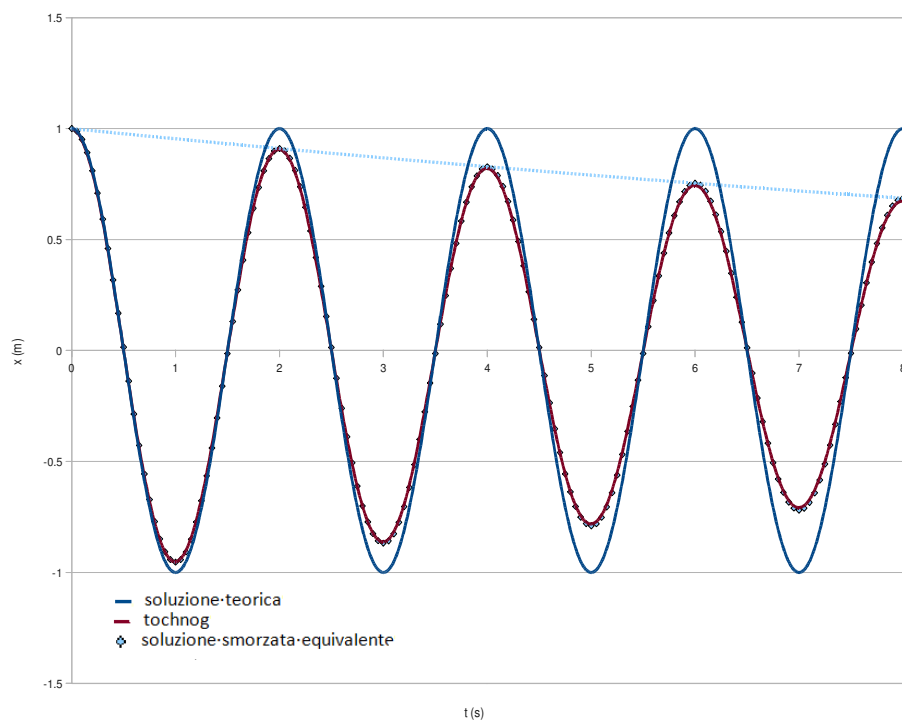


Figura 5.5.4: Confronto tra soluzione teorica, soluzione ottenuta con Tochnog e soluzione teorica smorzata equivalente avente uno smorzamento  $\xi=1.5\%$ . Parametro  $dt/T=0.005$

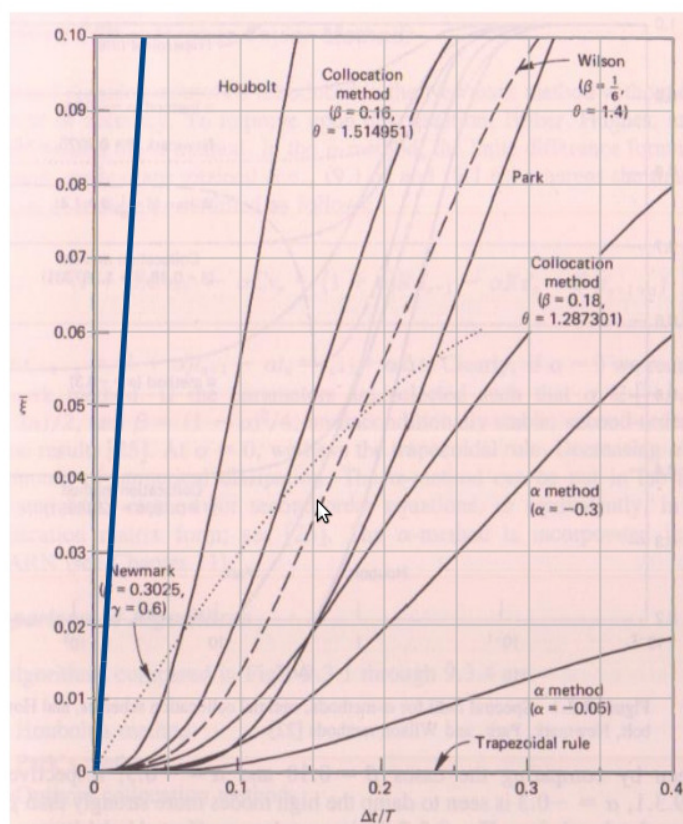


Figura 5.5.5: Smorzamento numerico indotto. BWE (linea blue).

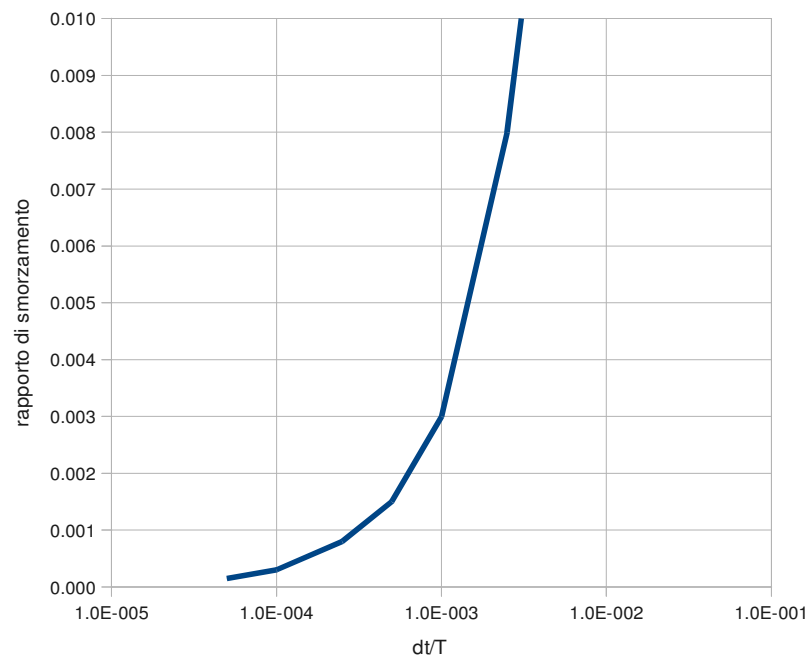


Figura 5.5.6: Smorzamento numerico indotto. Metodo BWE.

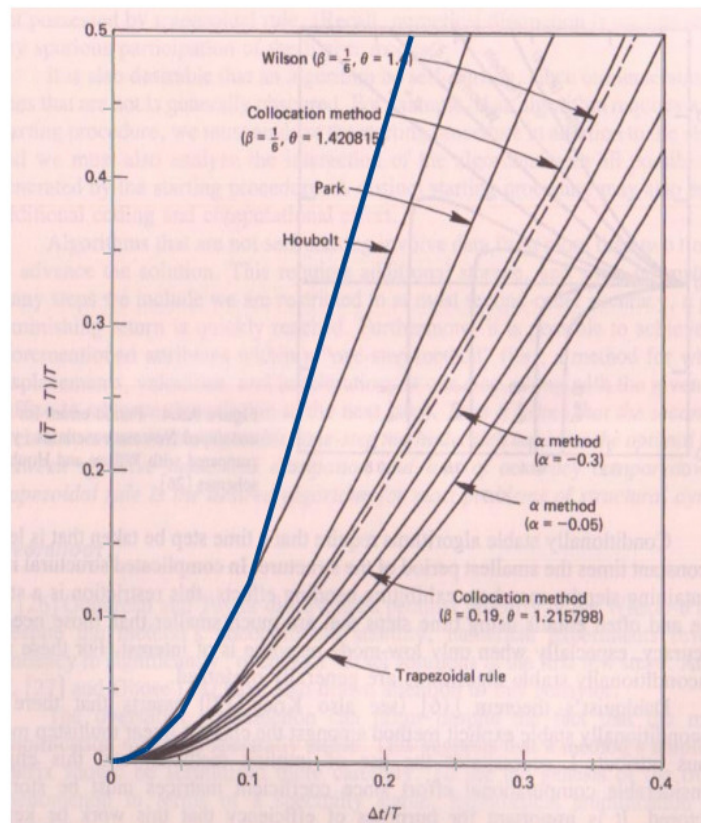


Figura 5.5.7: Incremento del periodo di oscillazione. BWE (linea blue).

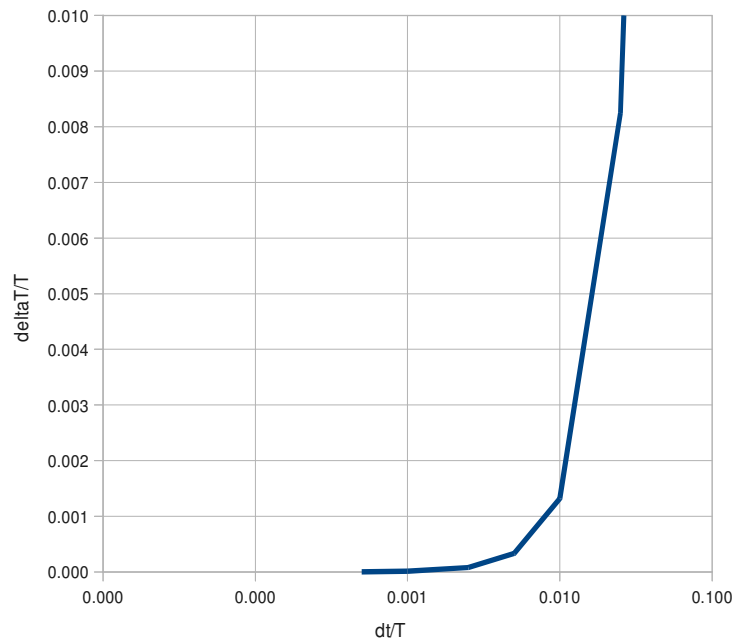
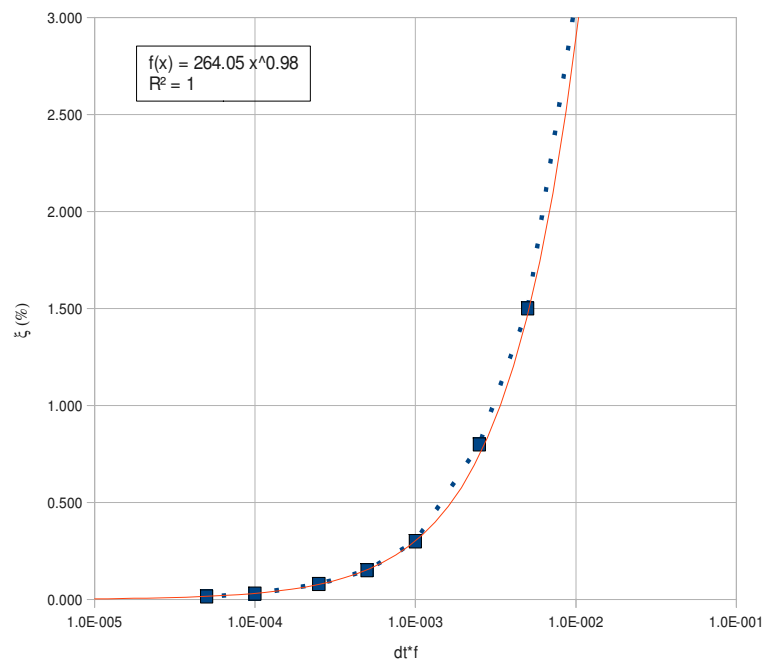
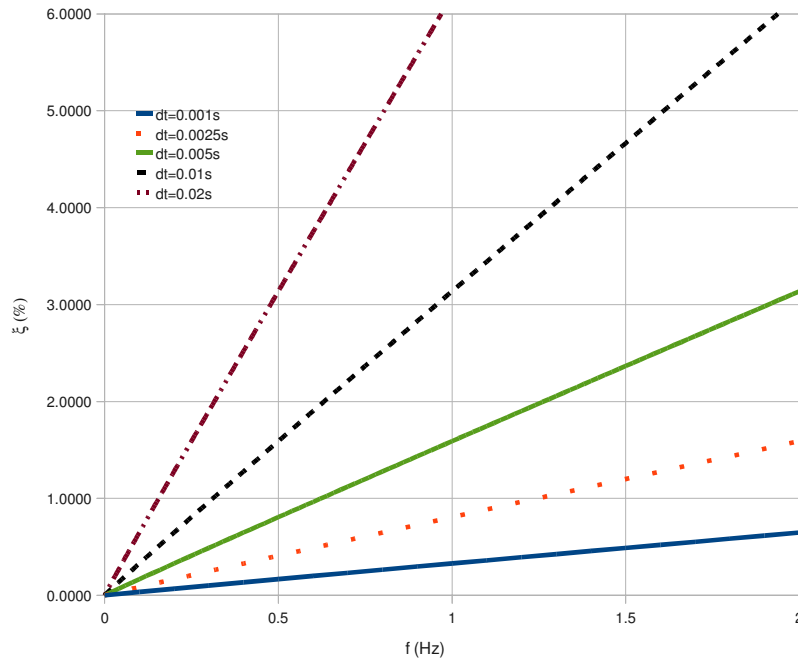


Figura 5.5.8: Incremento del periodo di oscillazione. Metodo BWE.

In conclusione lo smorzamento numerico indotto dal metodo di integrazione di Eulero all'indietro è dipendente dalla frequenza ed è rappresentato nel grafico 5.5.9. E' stata inoltre ricavata la legge di potenza che approssima molto bene i valori discreti ricavati. Infine per ogni  $dt$  è stato diagrammato il profilo dello smorzamento numerico in funzione della frequenza e rappresentato in Figura 5.5.10.


 Figura 5.5.9: Smorzamento numerico del metodo BWE funzione di  $dt*f$


 Figura 5.5.10: Smorzamento numerico funzione della frequenza per ciascun passo temporale  $dt$ .

### 5.5.2. Lo smorzamento del metodo di Newmark

Da considerazioni analoghe a quelle svolte nel paragrafo precedente, è possibile ricavare la relazione dello smorzamento numerico con la frequenza del segnale e quella relativa all'elongazione del periodo.

Definita  $\Omega$  la quantità  $\Omega = \omega \Delta t = 2\pi \Delta t / T$ ,

lo smorzamento numerico e l'elongazione sono espresse con le relazioni seguenti:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) [\Omega + O(\Omega^2)]$$

$$\frac{\bar{T} - T}{T} = O(\Omega^2) \quad .$$

In realtà, per basse frequenze il termine  $\Omega^2$  può essere trascurato perciò lo smorzamento  $\bar{\xi}$  è lineare con la frequenza e dipende dal passo di integrazione  $\Delta t$ . L'elongazione del periodo è meno sensibile alla frequenza poiché dipende dal termine  $\Omega^2$ .



## Capitolo 6

# **ANALISI PRELIMINARI DI CALIBRAZIONE**

## 6.1. INTRODUZIONE

In questo capitolo sono stati presi in considerazione alcuni aspetti fondamentali per stabilire la correttezza dei risultati delle analisi dinamiche descritte nei capitoli successivi.

Inizialmente sono stati messi in luce i criteri appropriati per riprodurre fenomeni propagazione ondosa con la tecnica degli elementi finiti ed in particolare la dimensione degli elementi. Successivamente è stato trattato il problema delle condizioni al contorno del modello e, tra le soluzioni disponibili e diffusamente impiegate, è stata scelta quella proposta da *Lysmer & Kuhlmeyer (1969)*.

Come è noto questo tipo di condizione al contorno è particolarmente efficace se l'onda è perfettamente incidente (o quasi) e il mezzo è elastico lineare. Inoltre questo tipo di vincolo è stato pensato per problemi in cui la sorgente ondosa è situata all'interno del mezzo. Se il moto sismico viene applicato a tutta la base del modello, invece, come nel caso della risposta sismica di terreni, l'intero dominio è costretto a muoversi, compresi i contorni laterali.

Se i vincoli di Lysmer & Kuhlmeyer sono collegati da un lato ad un nodo della mesh e dall'altro ad un punto fisso (come quelli implementati in TOCHNOG) è evidente che quella porzione di mesh vicina ai bordi non può seguire liberamente il moto di *free-field*. Se la loro è modesta, la presenza dei vincoli applicati sul contorno laterale modifica anche il moto nella zona centrale del modello. E' per questa ragione che è stato opportuno quantificare questo effetto per scegliere il tipo di vincolo laterale e calibrare accuratamente le dimensioni complessive del modello. Lo studio ha quindi analizzato la modifica del moto di *free-field* indotta da questo tipo di vincoli inizialmente in presenza di un materiale elastico lineare, per poi estendere il caso anche ad un materiale il cui comportamento è descritto dal modello di *Dafalias & Manzari (2004)*(DM).

Nella seconda parte del capitolo infine è stata descritta la tecnica di modellazione del palo (utilizzata nelle analisi di interazione terreno-struttura) e sono stati rappresentati alcuni confronti con soluzioni disponibili in letteratura che ne hanno evidenziato la correttezza.

## 6.2. DIMENSIONE DEGLI ELEMENTI FINITI

Al fine di rappresentare al meglio una onda di una data frequenza è sufficiente avere 10 nodi per lunghezza d'onda  $\lambda$  (Hughes, 1987). Un numero minore di 10 nodi può portare ad uno smorzamento numerico che può trascurare alcuni picchi dell'onda. In presenza di elementi con funzioni di forma quadratiche invece, è sufficiente avere solo 5 nodi per lunghezza d'onda e quindi solo due elementi.

Al fine di determinare la massima spaziatura è necessario stabilire quale sia l'onda di frequenza massima che debba essere valutata dal modello. Tipicamente per le analisi di risposta sismica si può fissare come frequenza massima  $f_{max} = 10$  Hz e la distanza massima tra i nodi del modello quindi può essere ricavata con la relazione:

$$\Delta h \leq \frac{\lambda}{10} = \frac{v_{min}}{10 f_{max}}$$

dove  $v_{min}$  è la più bassa velocità di propagazione delle onde.

Se si analizza la propagazione delle onde in un mezzo elastico lineare, la  $v_{min}$  è proprio la velocità di propagazione delle onde nel mezzo calcolata sulla base della rigidità elastica. Se il materiale non è elastico lineare, invece, la rigidità non è costante e quindi la  $v_{min}$  deve essere stimata.

In tutte le analisi condotte in questa tesi con il modello DM, il valore di  $v_{min}$  è stato stimato sulla base del modulo a piccole deformazioni e di un fattore riduttivo pari a 0.2, corrispondente a forti deformazioni di taglio indotte.

E' necessario precisare che la stima della rigidità equivalente non ha tenuto conto dell'influenza della pressione media ma solo l'effetto dovuto alle deformazioni distorsive. Infatti se la pressione media si riduce durante l'evento sismico, a causa dell'accumulo progressivo di sovrappressioni interstiziali, la rigidità equivalente tende a ridursi allo stesso modo, poiché essa è funzione anche di  $p'$ . Se si volesse riprodurre adeguatamente la propagazione delle onde tenendo presente questo contributo, sarebbe necessario ridurre fortemente la dimensione degli elementi con l'inconveniente di un elevato onere computazionale. E' tuttavia opportuno sottolineare che la valutazione dell'accuratezza dei risultati in funzione della dimensione degli elementi è stata illustrata nel Capitolo 7.

### 6.3. LE CONDIZIONI AL CONTORNO LATERALE

Uno dei principali problemi che si incontrano nella simulazione dei fenomeni di propagazione ondosa mediante modelli numerici agli elementi finiti di estensione limitata, riguarda la possibile comparsa di riflessioni multiple a causa della presenza dei contorni laterali del modello. La posizione di tali contorni arbitraria e quindi, le onde da essi riflesse non hanno alcun significato fisico e rappresentano una fonte di errore nella soluzione. Per eliminare tali riflessioni e simulare una condizione di perfetta trasmissione delle onde, è necessario adottare alcune strategie proposte in letteratura.

La strategia più diffusa è quella proposta da *Lysmer & Kuhlmeyer (1969)*. Gli Autori hanno previsto di utilizzare elementi molla-smorzatore di opportune caratteristiche in corrispondenza dei nodi sul contorno. La formulazione è valida per un mezzo elastico lineare ed è possibile pervenire all'entità delle costanti da assegnare allo smorzatore esaminando il semplice caso monodimensionale.

Considerando l'equilibrio di un elemento di terreno in condizioni monodimensionali si ottengono le due equazioni rispettivamente valide per onde di taglio e per onde di compressione:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\end{aligned}$$

Il legame costitutivo si esprime nella forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= G \frac{\partial u}{\partial y} \\ \sigma_{yy} &= E_{ed} \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

Si consideri una barra verticale (Figura 6.3.1) costituita da due materiali omogenei elastici lineari posti a contatto tramite una discontinuità orizzontale (tratto AB). Si consideri un'onda di taglio (onda S) che percorra il materiale dal basso verso l'alto. In corrispondenza della discontinuità ( $y_0 = 0$ ) e per ciascun istante di tempo  $t$ , è necessario il rispetto sia della congruenza tra lo spostamento imposto dall'onda incidente, l'onda riflessa e l'onda trasmessa sia dell'equilibrio tra le tensioni che si sviluppano a seguito delle tre onde.

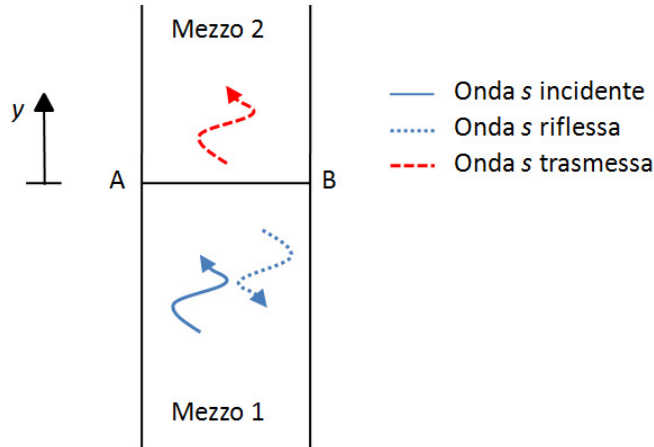


Figura 6.3.1: Propagazione monodimensionale di un'onda S verso la superficie di separazione (tratto AB) tra i due materiali.

$$\begin{aligned} u_I(y_0, t) &= A_I e^{i(\omega t - k_1 y_0)} \\ u_R(y_0, t) &= A_R e^{i(\omega t + k_1 y_0)} \\ u_T(y_0, t) &= A_T e^{i(\omega t - k_2 y_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xyI}(y_0, t) &= -i k_1 A_I G_1 e^{i(\omega t - k_1 y_0)} \\ \sigma_{xyR}(y_0, t) &= +i k_1 A_R G_1 e^{i(\omega t + k_1 y_0)} \\ \sigma_{xyT}(y_0, t) &= -i k_2 A_T G_2 e^{i(\omega t - k_2 y_0)} \end{aligned}$$

Definendo l'impedenza specifica  $\alpha_s = \frac{\rho_1 v_{s1}}{\rho_2 v_{s2}}$  con  $v_{si}$  la velocità delle onde di taglio nel mezzo  $i$ , la relazione tra le ampiezze delle tre onde è:

$$A_R = A_I \frac{1 - \alpha_s}{1 + \alpha_s} \quad \text{e} \quad A_T = A_I \frac{2}{1 + \alpha_s} .$$

Se la discontinuità fosse proprio il bordo del dominio agli elementi finiti, sarebbe necessario fare in modo di non avere onde riflesse. Imponendo  $A_R = 0$  si ha che  $\alpha_s = 1$  e quindi  $\rho_1 v_{s1} = \rho_2 v_{s2}$ .

Al bordo è sufficiente avere uno smorzatore viscoso (Figura 6.3.2, Figura 6.3.3) che imponga una tensione istante per istante uguale e contraria alla tensione trasmessa.

$$\sigma_{smorz}(t) = -\sigma_{xyT}(y_0, t) = -(-i k_2 A_T G_2 e^{i(\omega t - k_2 y_0)})$$

tenendo presente che  $k_2 G_2 = \omega \rho_2 v_{s2} = \omega \rho_1 v_{s1}$  e  $A_T = A_I$ , si ottiene:

$$\sigma_{smorz}(t) = i \omega \rho_1 v_{s1} A_I e^{i(\omega t)} = \rho_1 v_{s1} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

La costante di viscosità dello smorzatore è indipendente dalla frequenza dell'onda trasmessa ma è funzione solamente delle caratteristiche del mezzo nel quale si trasmette l'onda.

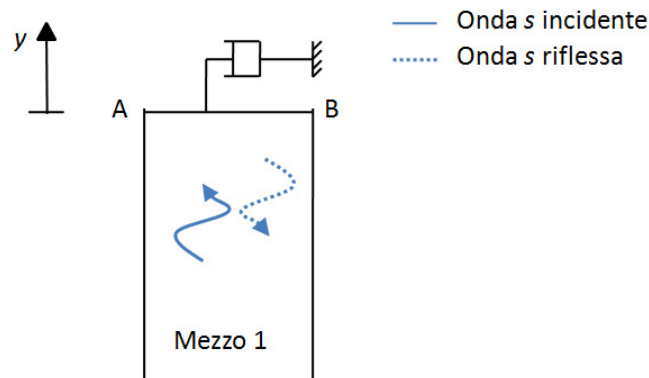


Figura 6.3.2: Smorzatore applicato in corrispondenza del tratto AB, con lo scopo di annullare l'onda riflessa.

Con il procedimento svolto è stata ricavata la costante di viscosità dello smorzatore che agisce solo sulle onde S. Se sulla discontinuità perviene una onda P, è sufficiente ripetere lo stesso procedimento ed ottenere il coefficiente di viscosità dello smorzatore in direzione parallela a quella dell'onda.

$$\sigma_{smorz}(t) = i \omega \rho_1 v_{p1} A_I e^{i(\omega t)} = \rho_1 v_{p1} \frac{\partial v}{\partial t}$$

con  $v_{pi}$  la velocità delle onde di compressione nel mezzo  $i$ .

Tutta la trattazione fin qui svolta riguarda solo il caso monodimensionale di un'onda trasmessa in un mezzo elastico lineare. Sono presenti studi in letteratura (Cohen M, 1982; Cohen M. e Jennings P.C., 1983) che hanno valutato l'efficacia dei vincoli di L&K anche a casi bidimensionali e tridimensionali ed hanno evidenziato una efficienza elevata anche per onde incidenti con angoli compresi tra  $-30^\circ$  e  $30^\circ$  rispetto alla normale al bordo.

Inoltre la presenza di materiale non lineare può causare ulteriori problemi poiché le caratteristiche degli

smorzatori dipendono dalle caratteristiche elastiche del mezzo a cui si riferiscono. Se il materiale è non lineare, la sua rigidità non è costante e di conseguenza la viscosità degli smorzatori dovrebbe essere aggiornata per mantenere una adeguata efficienza. La scelta più opportuna probabilmente è quella di calibrare la rigidità equivalente del terreno sulla base di una preliminare analisi di risposta sismica locale monodimensionale.

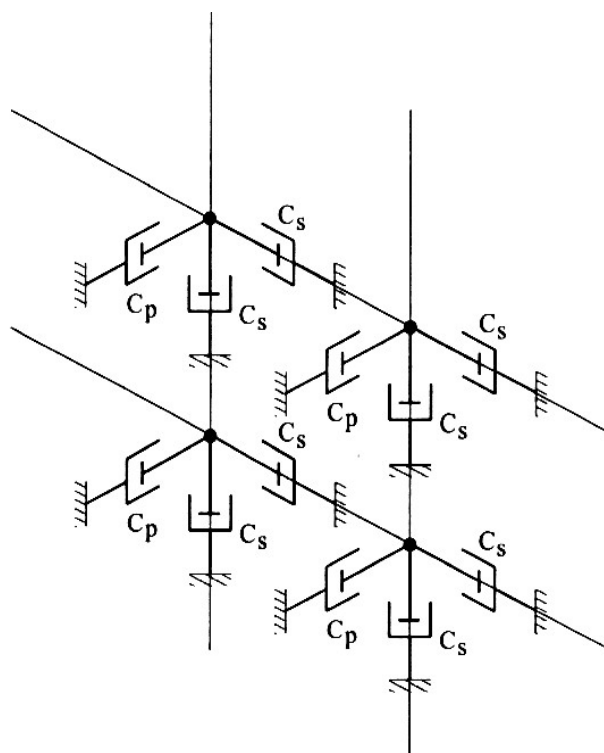


Figura 6.3.3: Contorni laterali assorbenti.

### 6.3.1. Risposta sismica locale: mezzo vico-elastico lineare

Come ricordato nell'introduzione, in questo paragrafo è stata studiata la variazione del moto nella parte centrale del modello dovuto alla presenza di condizioni al contorno di L&K applicate alle superfici verticali laterali.

A tal proposito è stata condotta un'analisi di risposta sismica locale adottando una mesh piana avente le seguenti dimensioni (Figura 6.3.4):

- $H=100\text{m}$
- $B = 2H, 4H \text{ e } 8H$ ;

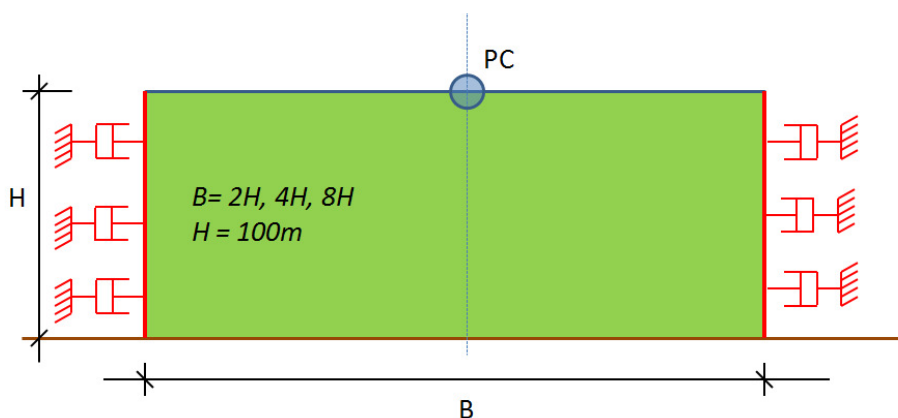


Figura 6.3.4: Dimensioni del modello.

L'accelerogramma di riferimento è quello di Colfiorito filtrato ad una frequenza massima di 1.8 Hz (per avere un minor numero di elementi) ed è stato applicato sul bordo inferiore sotto forma di campo di velocità (Figura 6.3.5).

Il materiale preso in considerazione ha le seguenti proprietà:

- $E = 40 \text{ Mpa}$ ;
- $\nu = 0$ ;
- $\rho = 2 \text{ Mg/m}^3$ ;



–  $\eta = 700 \text{ kPa s}$ .

Sulle superfici laterali sono stati applicati i contorni assorbenti di *Lysmer & Kuhlemeyer (1969)*.

E' stato registrato il campo di accelerazioni di un punto centrale e in testa al modello (punto PC) e confrontato con quello teorico ottenuto da una analisi di risposta sismica locale monodimensionale teorica, ricavata in Matlab.

Dall'analisi dei risultati (Figura 6.3.6, Figura 6.3.7 e Figura 6.3.8) è evidente che i vincoli laterali di L&K modificano il moto sismico nel punto PC anche nella condizione di modello con  $B=8H$ .

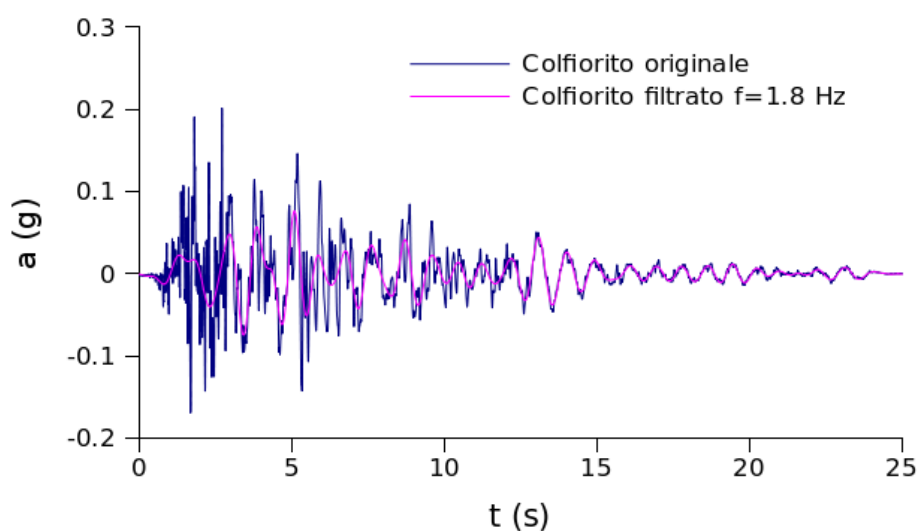


Figura 6.3.5: Accelerogramma di Colfiorito originale e filtrato alla frequenza di 1.8Hz.

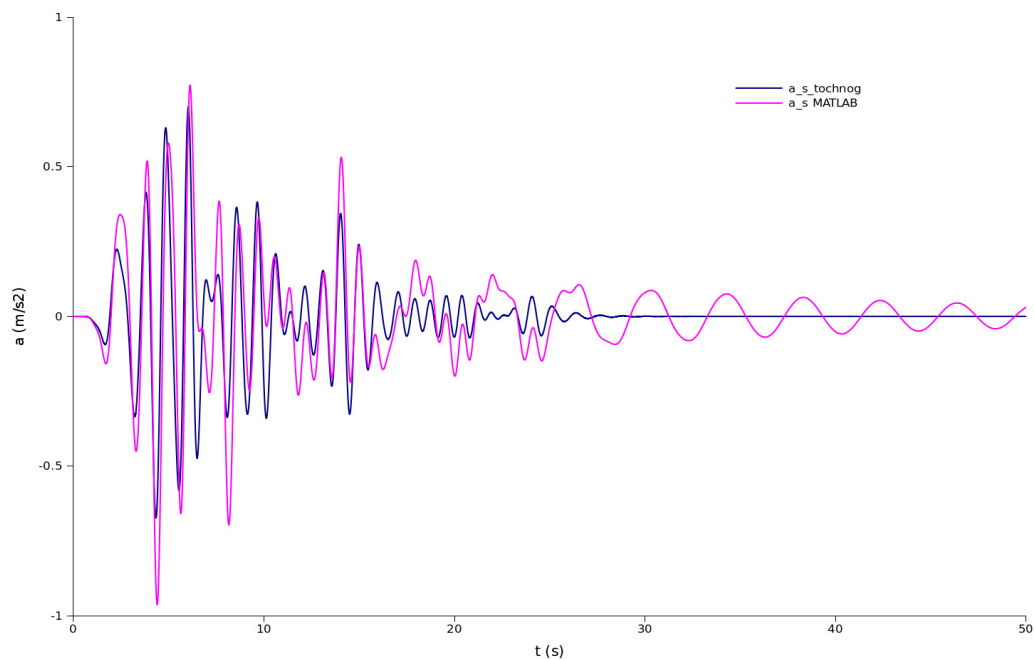


Figura 6.3.6: Confronto tra le accelerazioni in superficie registrate al centro del modello ( $a_{s\_tochnog}$ ,  $B=2H$ ) e quelle ottenute da una analisi di risposta sismica monodimensionale teorica in MATLAB ( $a_{s\_MATLAB}$ ).

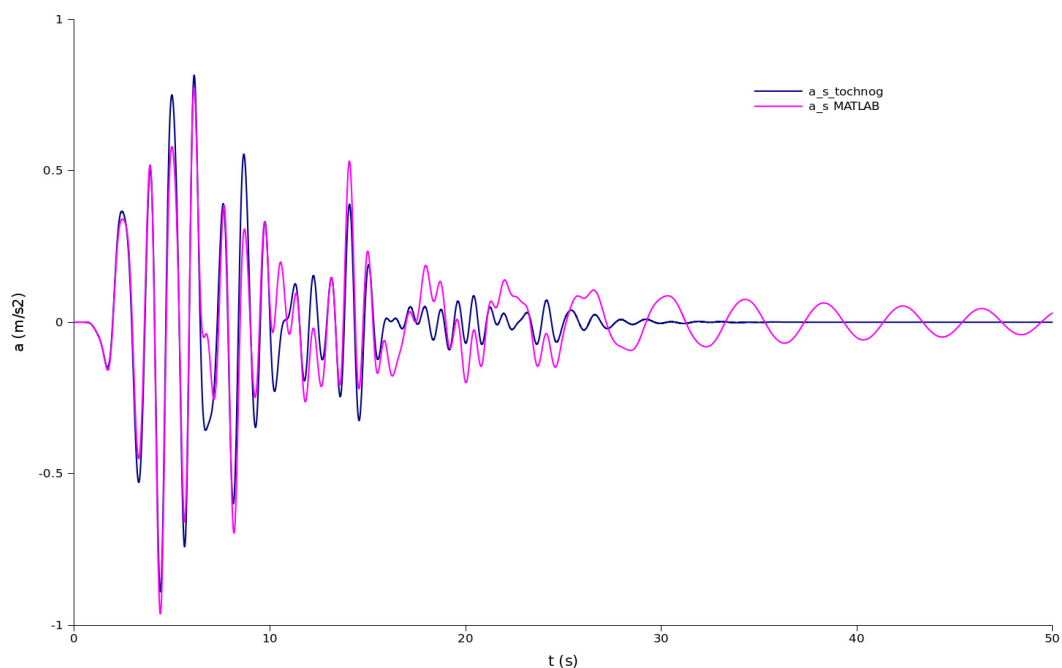


Figura 6.3.7: Confronto tra le accelerazioni in superficie registrate al centro del modello ( $a_{s\_tochnog}$ ,  $B=4H$ ) e quelle ottenute da una analisi di risposta sismica monodimensionale teorica in MATLAB ( $a_{s\_MATLAB}$ ).

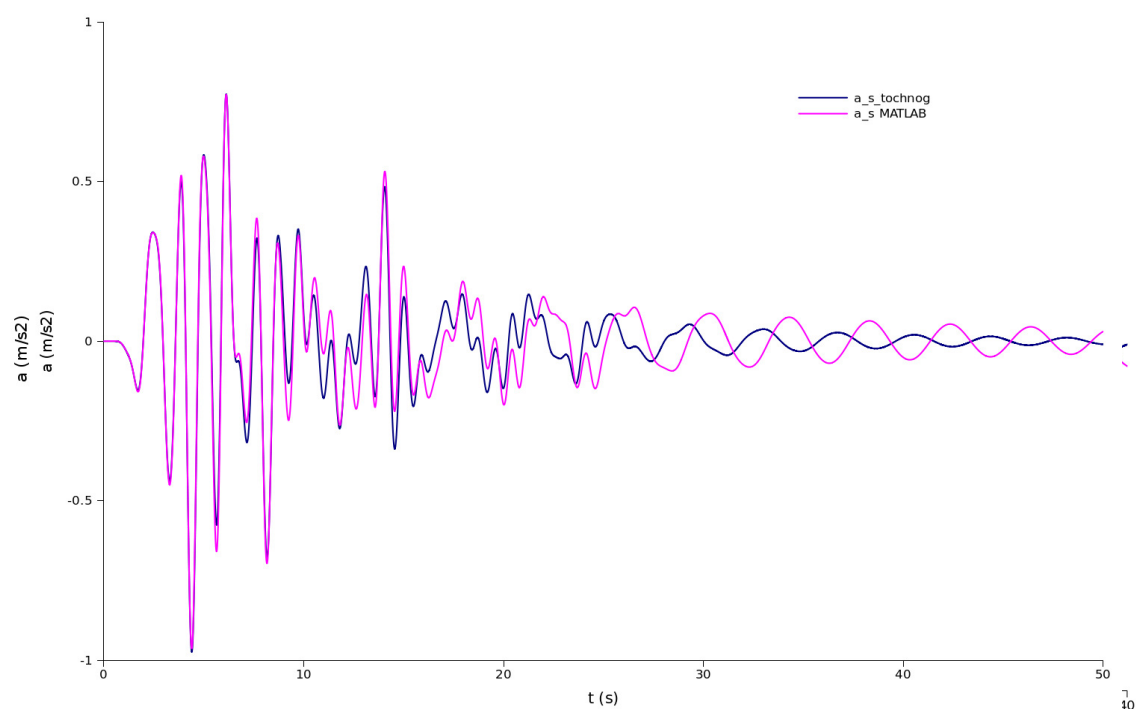


Figura 6.3.8: Confronto tra le accelerazioni in superficie registrate al centro del modello ( $a_{s\_tochnog}$ ,  $B=8H$ ) e quelle ottenute da una analisi di risposta sismica monodimensionale teorica in MATLAB ( $a_{s\_MATLAB}$ ).

### 6.3.2. Risposta sismica locale: modello DM

L'interesse in questo paragrafo è quello di illustrare la modifica del moto sismico nel punto PC indotta dai vincoli di L&K, anche quando il materiale nel quale è in atto la propagazione ondosa è descritto dal modello DM.

Come nel caso precedente, è stata condotta una analisi di risposta sismica locale adottando una mesh piana avente le seguenti dimensioni:

- $H = 50\text{m}$ ;
- $B = H, 2H, 4H$ .

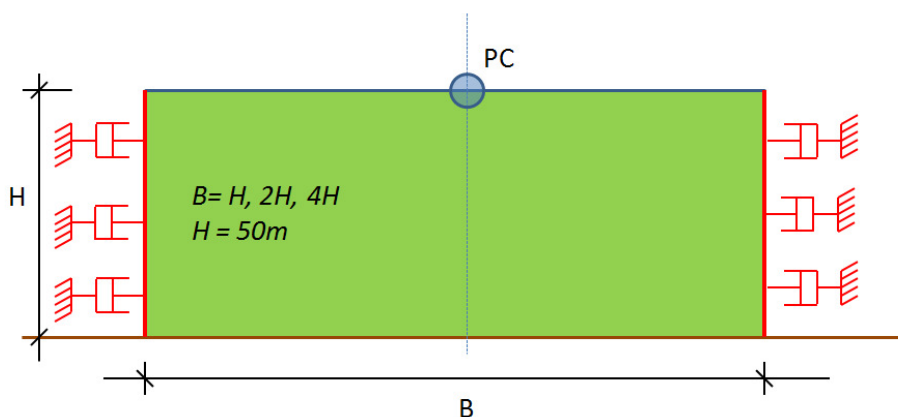


Figura 6.3.9: Dimensioni del modello.

I parametri del modello DM utilizzati per questo studio sono quelli della *Toyoura Sand* riportati nel Capitolo 7.

I contorni assorbenti sono stati calibrati sulla base della rigidezza equivalente del terreno. Essa è stata calcolata a partire da quella a piccole deformazioni e dal profilo delle deformazioni di taglio massime indotte in tutto il terreno, ricavato da una analisi di risposta sismica locale con l'utilizzo di *contorni laterali periodici*. Questo tipo di condizione al contorno è stata illustrata in Figura 6.3.10 e consiste nell'imporre per ogni quota  $z$  che la distanza tra due nodi (A e B appartenenti ai due bordi laterali) sia sempre la stessa durante il moto sismico. In realtà questa condizione al contorno è ottimale solo nel caso di propagazione ondosa monodimensionale (con direzione delle onde parallela ai bordi) nelle condizioni di *free-field* ma risulta di fatto un vincolo perfettamente riflettente nel caso di onda incidente.

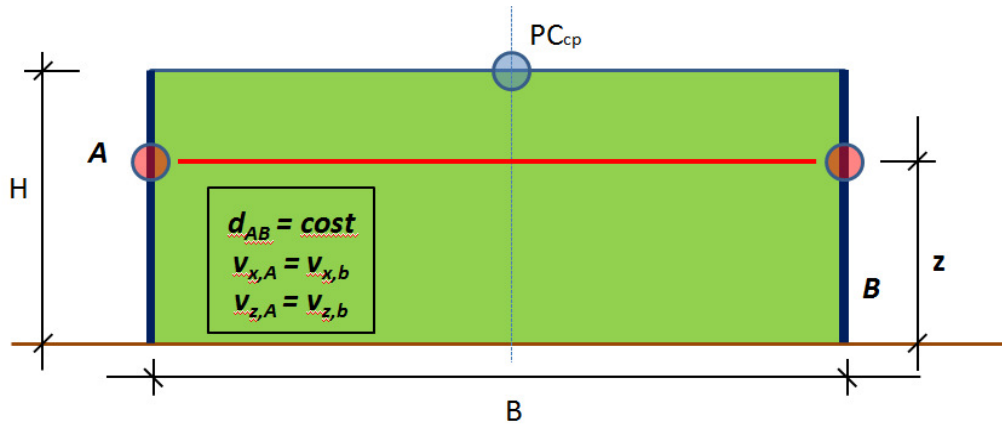


Figura 6.3.10: Contorni laterali “periodici”.

Per stimare la rigidezza equivalente da utilizzare nelle relazioni di L&K è stato necessario anche di un set di curve di decadimento del modulo secante in funzione della deformazione di taglio. Queste curve sono state ottenute tramite prove di taglio ciclico a pressione efficace media costante con il codice *INCREMENTAL DRIVER* sviluppato da A. Niemunis. Questo codice integra il modello costitutivo in un solo punto di Gauss applicando qualsiasi percorso di carico o di deformazione.

Per ogni simulazione, a parità di pressione efficace media, sono stati applicati 10 cicli a deformazione massima  $\gamma_{max}$  costante e la risposta del modello è stata rappresentata in un grafico  $\tau - \gamma$  (un esempio in figura 6.3.11). La forma dell'ultimo ciclo è stata successivamente approssimata ad un'ellisse e ne sono stati ricavati il modulo secante  $G_{sec}$  e lo smorzamento equivalente  $\xi$  con le relazioni:

$$W_e = 0.5 \gamma_{max} \tau_{max} ; \quad W_d = \pi \gamma_{max} \tau_{(\gamma=0)} ;$$

$$G_{sec} = \tau_{max} / \gamma_{max} ; \quad \xi = W_d / (4 \pi W_e) .$$

In Figura 6.3.11 la curva continua è il risultato della prova ottenuta con il Driver e l'ellisse (costituito dai punti) è stato ricavato a partire dall'ultimo ciclo, in modo tale da avere la stessa rigidezza secante e la stessa area. La prova è stata ripetuta aumentando la deformazione massima e ricavando sempre la rigidezza secante e l'area dell'ultimo ciclo. Con tutte le coppie di valori  $G/G_0$  e  $\xi$  in funzione di  $\gamma$  sono state costruite le curve di decadimento.

Una volta calibrati gli smorzatori sono state avviate le analisi i cui risultati sono stati rappresentati in Figura 6.3.12. Essi mostrano il confronto tra la storia temporale delle velocità orizzontali del punto  $PC_{cp}$  (Figura 6.3.10) utilizzando i *contorni periodici* (ff nel grafico) e le velocità orizzontali nel punto PC (Figura 6.3.9) nelle diverse condizioni.

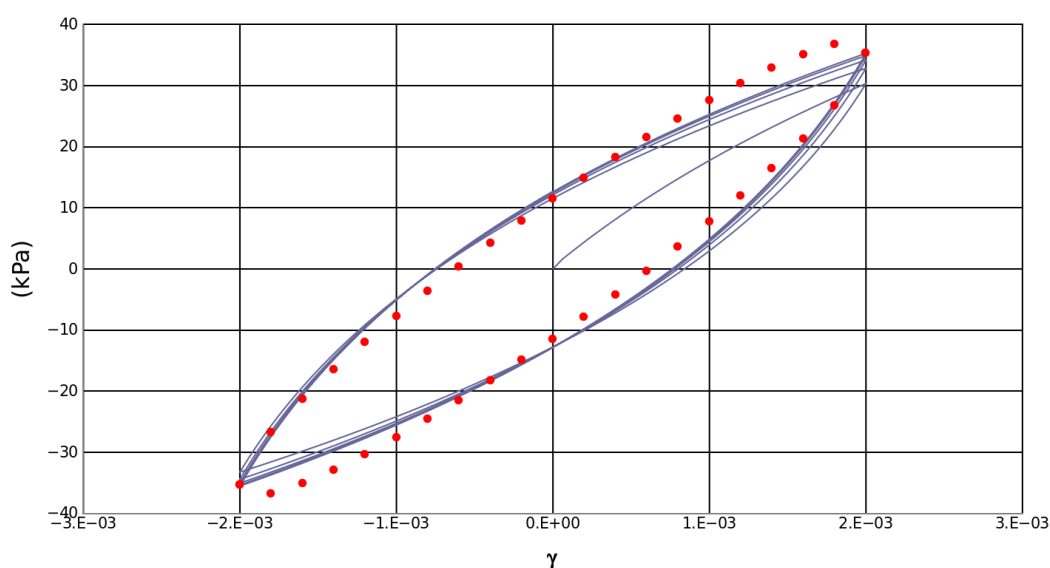


Figura 6.3.11: Confronto tra la simulazione di una prova di taglio semplice ottenuta con il modello di Dafalias & Manzari (2004) (linea continua) e la risposta del modello lineare equivalente (punti) la cui rigidità e smorzamento equivalenti sono stati ricavati dall'ultimo ciclo della simulazione.

I risultati dimostrano che il moto dei punti centrali è fortemente disturbato dalla presenza dei contorni assorbenti applicati sui contorni laterali. Tale disturbo tende a ridursi aumentando la dimensione della base del modello ma persiste anche se la base ha dimensioni  $4H=200\text{m}$ .

Per evitare quindi di essere costretti a realizzare modelli eccessivamente larghi, in tutte le analisi illustrate nei capitoli seguenti è stato deciso di utilizzare i *vincoli periodici* (Figura 6.3.10) sui bordi laterali della mesh al posto di quelli di L&K, accettando implicitamente la riflessione delle onde incidenti.

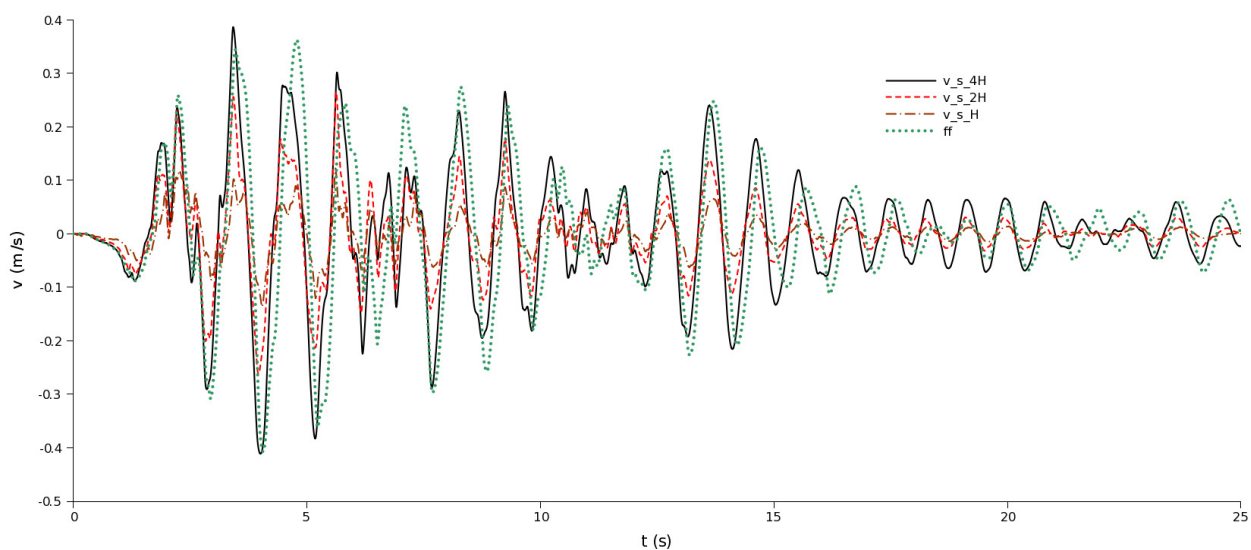


Figura 6.3.12: Confronto tra le storie temporali delle velocità in PC e PC<sub>cp</sub>.

## 6.4. IL PALO COME ELEMENTO STRUTTURALE

Prima di effettuare analisi di interazione terreno-struttura, illustrate nel Capitolo 7 e 9, è stato opportuno condurre alcune analisi preliminari anche sull'elemento strutturale in modo tale da verificarne l'accuratezza.

Il problema tridimensionale preso in esame ha visto la presenza di un palo immerso in un terreno omogeneo di spessore pari a 50m e larghezza pari a 200m (quadrata in pianta), illustrato in Figura 6.4.1. Il palo invece ha un diametro di 1m, lunghezza di 20m, libero di ruotare in testa e sottoposto ad una forza orizzontale ( $F$ ) pari a  $10^5$  kN.

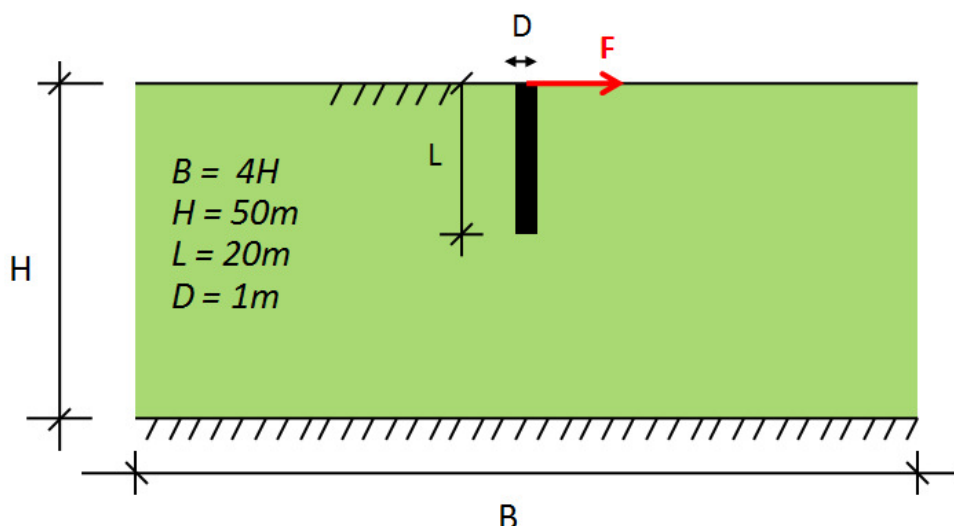


Figura 6.4.1: Dimensioni del modello. Vista 2D.

Il terreno è stato modellato con elementi isoparametrici a 8 nodi e legame costitutivo elastico lineare con modulo di Young pari a 40 MPa e coefficiente di Poisson pari a 0.0.

Il palo è stato modellato con elementi *truss-beam* e collegati ai nodi della mesh circostanti con altri elementi dello stesso tipo in modo da mantenere la planarità di ciascuna sezione (Figura 6.4.2). Il modello costitutivo utilizzato per questo tipo di elementi è elastico lineare con modulo di elasticità pari a 30 GPa.

Il problema è stato studiato inizialmente con un palo costituito soltanto da 4 elementi *truss-beam* ( $dz=5$ m) che successivamente sono stati aumentati fino a raggiungere il numero di 20 ( $dz=1$ m) per una analisi di maggiore dettaglio.

I risultati sono stati rappresentati in termini di spostamenti orizzontali e momenti flettenti indotti nel palo. I valori successivamente sono stati normalizzati e confrontati con quelli disponibili in letteratura da *Randolph (1981)* in Figura 6.4.3 e Figura 6.4.4.

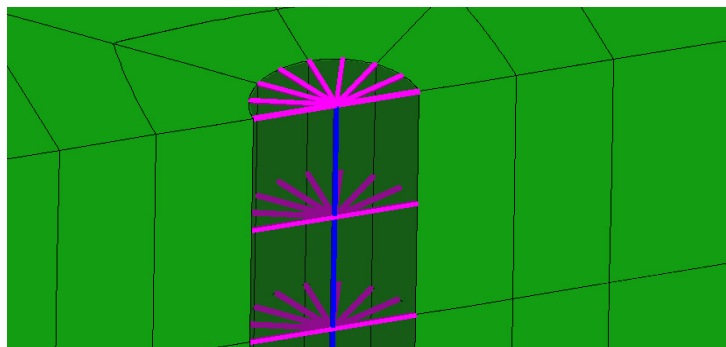


Figura 6.4.2: Particolare del palo. Elementi *truss-beam* che connettono l'asse del palo agli elementi di terreno al contorno.

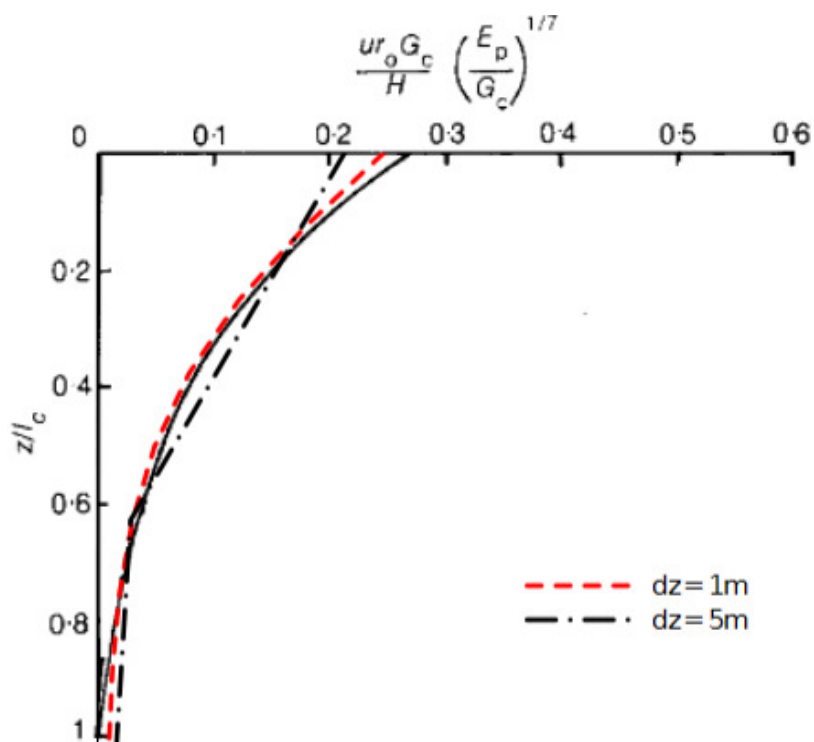


Figura 6.4.3: Confronto tra gli spostamenti orizzontali ricavati con il modello di palo utilizzato e quello ottenuto con la soluzione di *Randolph (1981)*.



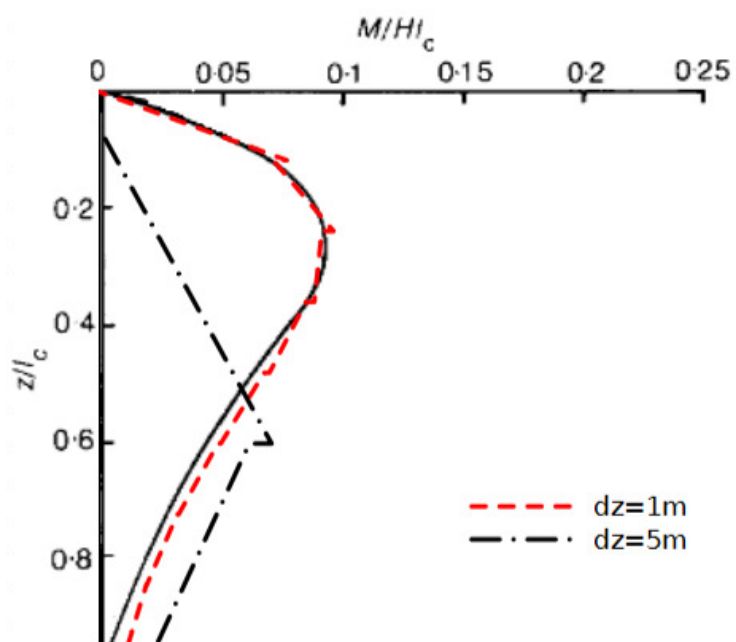


Figura 6.4.4: Confronto tra momenti flettenti ricavati con il modello di palo utilizzato e quello ottenuto con la soluzione di *Randolph (1981)*.



## Capitolo 7

# **ANALISI DELL'INTERAZIONE TERRENO- STRUTTURA: L'INTERAZIONE CINEMATICA**

## 7.1 INTRODUZIONE

Nel presente capitolo è stato descritto il programma di analisi al finito che hanno riguardato la risposta sismica locale e l'analisi di interazione cinematica palo-terreno.

Sono state messe in luce le capacità predittive del modello di *Dafalias & Manzari (2004)*, implementato nel corso del Dottorato di Ricerca, focalizzando l'attenzione in particolar modo ai cedimenti del piano campagna, agli incrementi delle pressioni interstiziali, alle caratteristiche del moto in superficie e alle deformazioni massime permanenti raggiunte alla fine dell'evento sismico.

Nel paragrafo 7.2 sono state fornite indicazioni relative alla geometria del problema e la tipologia di analisi effettuate. Nei paragrafi 7.3 e 7.4 sono stati descritti rispettivamente i risultati delle analisi di risposta sismica locale e delle analisi di interazione che, successivamente, sono stati utilizzati per i confronti con le soluzioni semplificate nel Cap 8. Nel paragrafo 7.5 infine sono stati illustrati gli studi che hanno permesso di verificare l'accuratezza delle analisi al finito.

## 7.2 DEFINIZIONE DEL PROBLEMA

La stratigrafia presa in esame, rappresentata in Figura 7.2.1, è composta da due strati di materiale a grana grossa, ciascuno di spessore pari a 15 m e descritti dal modello di *Dafalias & Manzari (2004)*. Lo strato superiore ha i parametri della *Toyoura Sand* (ad eccezione del coefficiente di Poisson) e l'indice dei vuoti (Figura 7.2.2) è stato ricavato dal parametro  $\Psi$  (*Been & Jefferies, 1985*), assunto costante nello strato e sempre negativo, in modo tale da far raggiungere alla densità relativa i valori compresi tra il 55% e l'85%. Lo strato inferiore invece è più rigido e più resistente di quello superiore, poiché ha gli stessi parametri ad eccezione di  $G_0$  e  $M$  che sono rispettivamente pari a 350 e 1.33 (Tabella 7.2.1).

In corrispondenza del contatto stratigrafico lo strato superiore ha una rigidezza iniziale circa tre volte più piccola di quella dello strato inferiore (Figura 7.2.3) e la velocità di propagazione delle onde di taglio ( $v_{s,30}$ ) è minore di 180 m/s. Il sottosuolo appartiene quindi alla classe di terreno di tipo D (DM 14.1.2008).

Lo stato iniziale del materiale, corrispondente ad una condizione di normal-consolidazione e centrato rispetto alla superficie di snervamento, è stato applicato all'inizio di ciascuna analisi (in equilibrio con le forze agenti senza violare il criterio di resistenza) e il coefficiente di spinta a riposo è stato ricavato dalla nota relazione di *Jaky (1944)*:  $K_0 = 1 - \sin(\varphi')$  ( $\varphi'$  ricavato da  $M$ ).

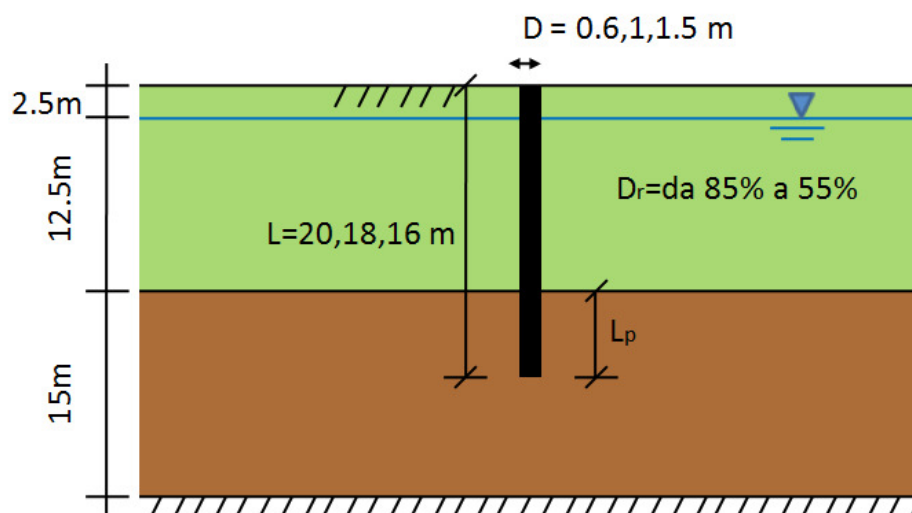


Figura 7.2.1: Stratigrafia presa in esame per lo studio parametrico.

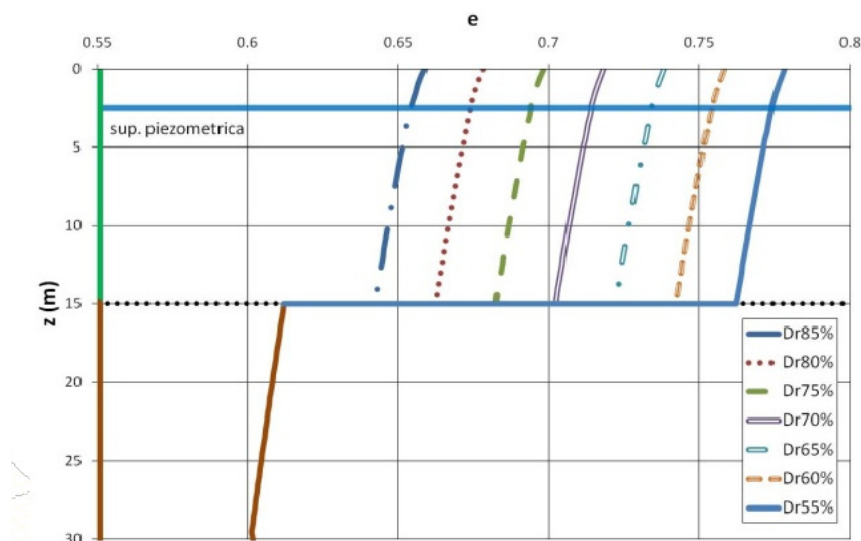


Figura 7.2.2: Profilo dell'indice dei vuoti utilizzato nello studio parametrico.

Parametro	Significato fisico	Toyoura Sand	Strat. Sup.	Strat. Inf.
$G_0$	Costante che def. rigidità el. $G_{max}$ .	125	125	350
$\nu$	Coeff. di Poisson	0.05	0.3	0.3
$M$	Resistenza a stato critico in compressione tx.	1.25	1.25	1.33
$c$	Rapporto tra la resistenza a stato critico in comp. tx. e quella in estensione tx.	0.712	0.712	0.712
$\lambda_c$	Pendenza della curva di S.C. nel piano e-p'	0.019	0.019	0.019
$e_0$	Intercetta della curva di S.C. nel piano e-p'	0.934	0.934	0.934
$\xi$	Esponente della curva di S.C. nel piano e-p'	0.7	0.7	0.7
$m$	Semiapertura della superficie di snervamento	0.01	0.01	0.01
$h_0$	Costante del modulo plastico	7.05	7.05	7.05
$c_h$	Costante del modulo plastico	0.968	0.968	0.968
$n^b$	Effetto di $\Psi$ sulla superficie di dilatanza	1.1	1.1	1.1
$A_0$	Costante di dilatanza	0.704	0.704	0.704
$n^d$	Effetto di $\Psi$ sulla resistenza di picco	3.5	3.5	3.5
$z_{max}$	Seconda costante legge di evoluzione del <i>fabric</i>	4	4	4
$c_z$	Prima costante legge di evoluzione del <i>fabric</i>	600	600	600

Tabella 7.2.1: Il modello di *Dafalias & Manzari (2004)*. Le costanti del modello utilizzate per lo strato inferiore (*Inf.*) e superiore (*Sup.*).

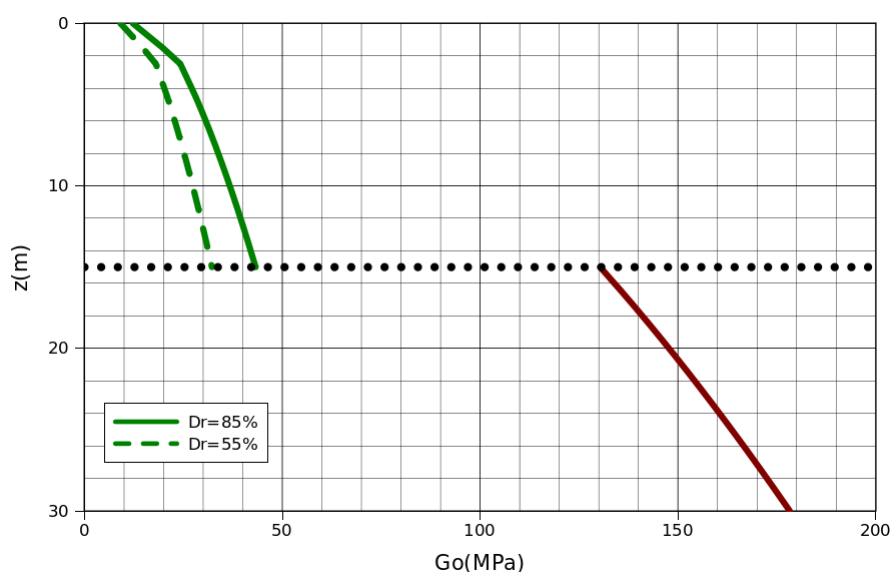


Figura 7.2.3: Profilo della rigidezza a piccole deformazioni.

Il palo, studiato sia nell'ipotesi di rotazione libera in testa sia di rotazione impedita, ha le seguenti dimensioni:

- L (Lunghezza) = 16, 18, 20m;
- D (Diametro) = 0.6, 1, 1.5m.

Le analisi eseguite sono di tre tipi.

- *Analisi drenate.*
- *Analisi non drenate.* In queste analisi, sempre svolte in termini di tensioni efficaci, si sono considerate condizioni non drenate nello strato superiore e condizioni drenate nello strato inferiore.
- *Analisi di consolidazione.* Entrambi gli strati sono in grado di sviluppare e di dissipare le sovrappressioni interstiziali. Per queste analisi sono stati adottati due diversi valori del coefficiente di permeabilità ( $10^{-6}$ ,  $10^{-5}$  e  $10^{-4}$  m/s) per lo strato superiore e un unico valore ( $10^{-4}$  m/s) per lo strato inferiore.

Gli eventi sismici considerati per le analisi sono due:

- Tolmezzo – Diga Ambiesta (6/5/1976) componente WE (Figura 7.2.4);

- Sturno (23/11/1980), componente NS (Figura 7.2.5).

Essi sono state scelti in modo tale da avere Magnitudo compresa tra 6.4 e 7, distanza epicentrale di circa 20-30 km e lo stesso valore di una grandezza rappresentativa dell'intero moto (l'Intensità di Arias) per entrambi gli eventi sismici.

In realtà, le due storie temporali sono molto diverse tra di loro. Esse infatti hanno differenti accelerazioni massime, differenti valori di Durata Significativa e differenti contenuti in frequenza, come mostrato in Tabella 7.2.2. Il primo evento sismico ha una sola fase intensa in corrispondenza di circa 4s. L'evento di Sturno invece ha due fasi più modeste, la prima intorno a 4.5s mentre la seconda intorno a 10s, quest'ultima però di entità minore del prima.

Prima di essere utilizzate nelle analisi numeriche, le storie temporali sono state filtrate ad una frequenza di 10 Hz ed è stata applicata loro anche la correzione dell'irrealistica deriva o “drift” della velocità e degli spostamenti relativi, in modo tale da essere nulli a fine sisma (*Baseline Correction*).

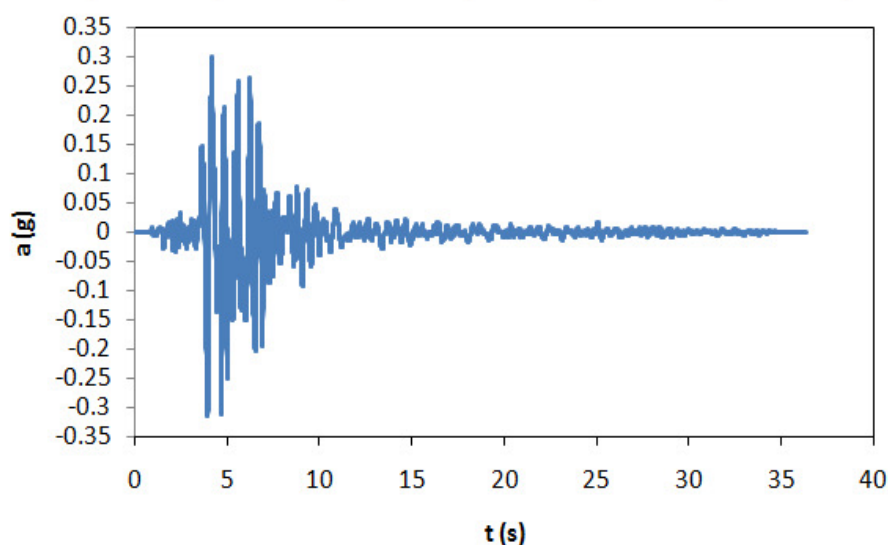


Figura 7.2.4: Storia temporale dell'accelerogramma di Tolmezzo – Diga Ambiesta, componente WE.

L'esecuzione di queste analisi ha consentito di valutare l'influenza di diversi parametri nei riguardi dell'interazione cinematica, quali l'indice dei vuoti, la permeabilità dei terreni, la lunghezza della parte di palo immersa nello strato rigido ( $L_p$ ) e la presenza del vincolo alla rotazione in testa al palo. Inoltre, data l'accuratezza del legame costitutivo e della modellazione al finito, i risultati dello studio parametrico hanno costituito un riferimento nel confronto con quelli che derivano da approcci semplificati.



	<b>Tolmezzo–Diga Ambiesta (WE)</b>	<b>Sturno (NS)</b>
$I_a (m/s)$	1.2	1.18
$a_{max} (g)$	0.3136	0.229
<i>Durata significativa (s)</i>	4.925	15.04
$T_p$ Periodo di picco (s)	0.64	0.38
$T_m$ Periodo medio (s) [Rathje,1998]	0.50	0.67

Tabella 7.2.2: Dati relativi ai due eventi sismici considerati.

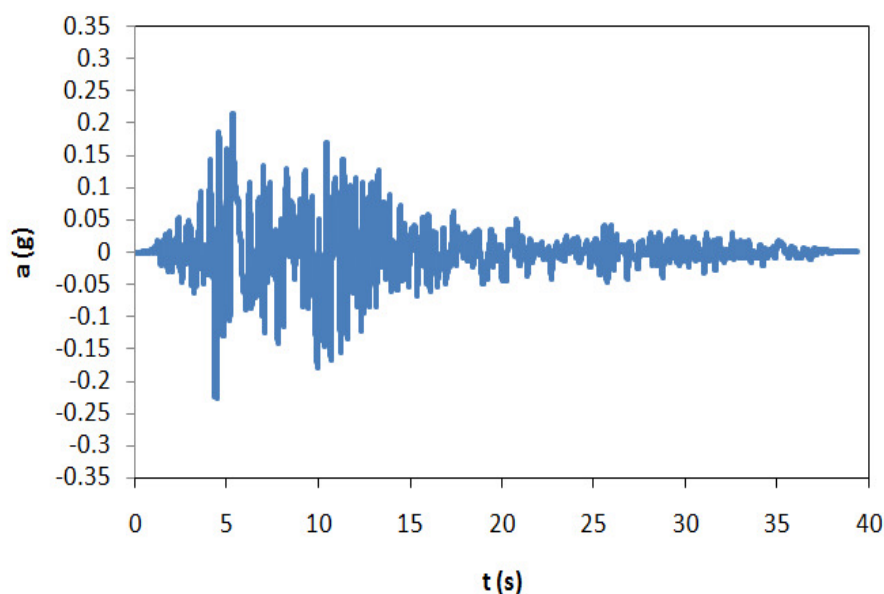


Figura 7.2.5: Storia temporale dell'accelerogramma di Sturno, componente NS.

Inizialmente lo studio ha riguardato l'analisi di risposta sismica locale (in assenza di palo), per ciascun caso dello studio parametrico, focalizzando l'attenzione sui seguenti aspetti:

- l'andamento nel tempo degli spostamenti verticali e delle velocità orizzontali in superficie;
- l'entità delle deformazioni massime raggiunte alla fine dell'evento sismico;
- l'evoluzione delle sovrappressioni interstiziali indotte nel tempo in tutta la stratigrafia.

Successivamente sono stati descritti tutti i risultati relativi all'interazione terreno-struttura, con particolare riferimento alle sollecitazioni indotte nel palo e alla modifica del moto sismico in testa.

La possibile dipendenza della soluzione dalla dimensione degli elementi, infine, è stata valutata da uno studio che ha preso in esame sia la risposta di *free-field* sia quella di interazione terreno-struttura. L'accuratezza delle analisi al finito è stata messa in luce anche da un confronto con i risultati forniti dal codice agli elementi finiti FEI (Università della California, Davis).

### 7.3 ANALISI DELLA RISPOSTA SISMICA LOCALE

#### 7.3.1 Risposta ciclica del modello DM

In generale durante l'evento sismico il terreno è sottoposto a deformazioni distorsionali che inducono prevalentemente sollecitazioni deviatoriche. In Figura 7.3.1 sottostante sono stati rappresentati i percorsi tensionali qualitativi in una prova di taglio ciclico in condizioni non drenate forniti dal modello DM. I risultati fanno riferimento al primo ciclo di carico applicato ad un materiale caratterizzato da un parametro di stato negativo ( $\psi_{0,A} < 0$ ) e dominio elastico molto piccolo (e quindi trascurato).

Nella prova di sinistra è possibile notare che, a seguito del primo incremento di carico ( $\Delta\tau_2$ ), lo stato tensionale oltrepassa la superficie di dilatanza ( $M_d$ ) ma il tratto è modesto (linea rossa) e l'incremento di pressione interstiziale ( $\Delta u$ ) risulta di compressione. A destra invece, a seguito di una sollecitazione di taglio più grande ( $\Delta\tau_1 > \Delta\tau_2$ ), lo stato tensionale supera significativamente la superficie di dilatanza cosicché la  $\Delta u$  generata risulta negativa, cioè di decompressione rispetto alle condizioni idrostatiche. E' inoltre possibile notare che le  $\Delta u$  generate per effetto dell'intero ciclo sono sempre di compressione, nonostante il materiale sia caratterizzato da parametro di stato negativo.

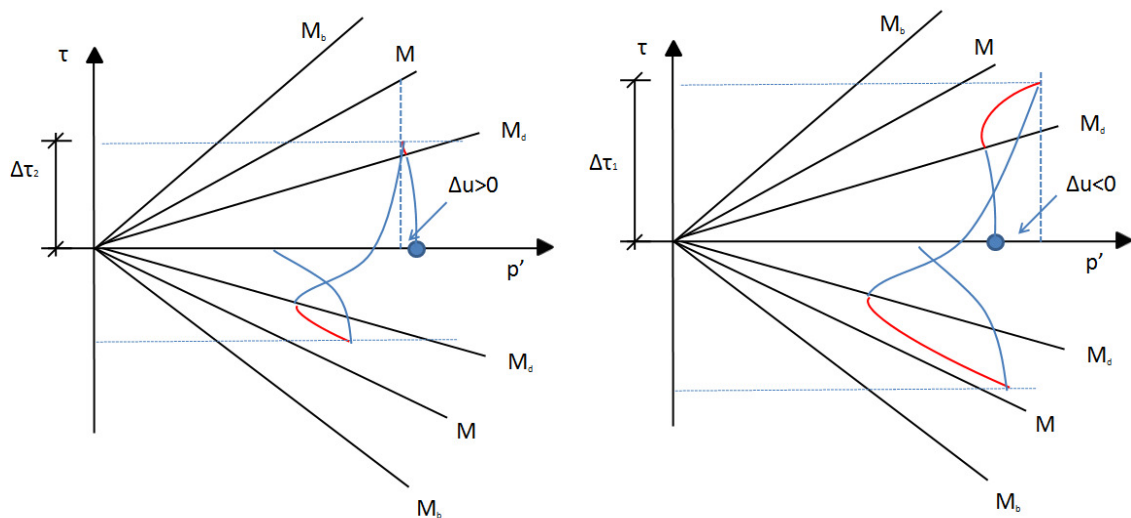


Figura 7.3.1: Risposta del modello. Percorso qualitativo di taglio ciclico di un materiale con  $\psi_0 < 0$ . Le linee  $M_b$  e  $M_d$  sono state tracciate facendo riferimento allo stato iniziale (la variazione di  $(\psi_A)$  rispetto a  $(\psi_{0,A})$  è stata trascurata ai fini illustrativi)

In Figura 7.3.2 invece sono stati rappresentati i percorsi tensionali relativi alla stessa prova di taglio ciclico in condizioni non drenate che però fanno riferimento ad un materiale con due diversi stati di addensamento iniziale  $\psi_{0,A} < \psi_{0,B}$ , entrambi negativi. E' possibile notare che se lo stato di addensamento è minore (Stato B), la regione dello spazio tensionale nella quale il materiale contrae è più ampia. Si osserva infatti che il percorso tensionale indotto dal primo tratto di carico ( $\Delta\tau_2$ ) (per lo stato B) non supera la superficie di dilatanza ( $M_d$ ) e l'accumulo progressivo delle pressioni interstiziali è quindi maggiore. Esso è inoltre ben visibile alla fine dell'intero ciclo di carico dal confronto del tratto  $\overline{OF}$  nei due casi.

Queste considerazioni sono utili per interpretare correttamente i risultati mostrati in seguito.

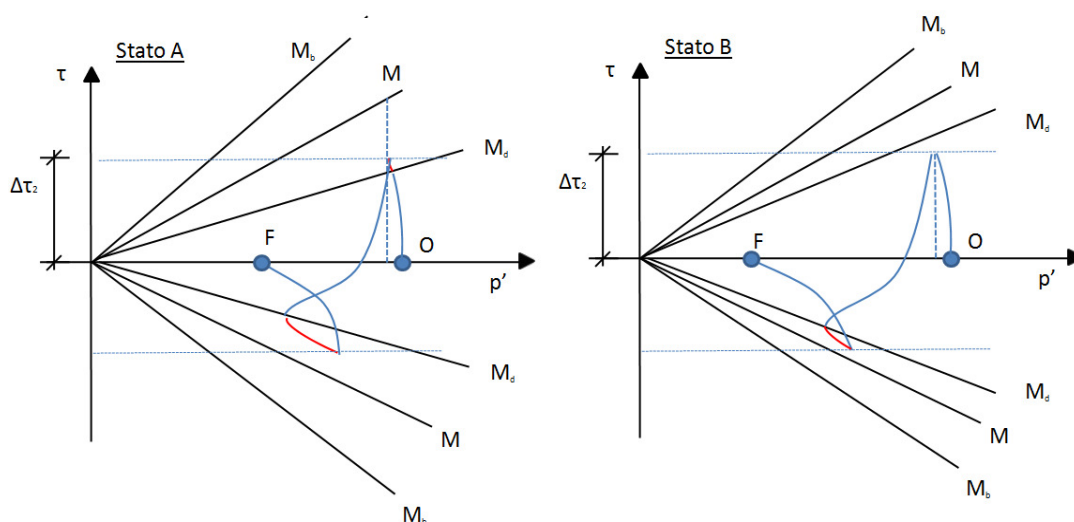


Figura 7.3.2: Risposta del modello. Percorso qualitativo in una prova di taglio ciclico. Gli stati di addensamento del materiale sono differenti:  $\psi_{0,A} < \psi_{0,B}$ . Le linee  $M_b$  e  $M_d$  sono state tracciate facendo riferimento allo stato iniziale (la variazione di  $\psi$  rispetto a  $\psi_0$  è stata trascurata ai fini illustrativi)

### 7.3.2 Accelerogramma di Tolmezzo

In tutte le analisi è stata applicata soltanto la porzione della storia temporale dell'evento sismico di Tolmezzo che va da 0s a 20s. La restante parte non è stata presa in considerazione poiché l'energia ad essa associata è significativamente minore rispetto a quella dei primi 20s.

#### 7.3.2.1 Sovrappressioni interstiziali

In Figura 7.3.3, Figura 7.3.4, Figura 7.3.5, Figura 7.3.6, Figura 7.3.7 e Figura 7.3.8 è stata rappresentata la distribuzione degli incrementi di pressione interstiziale ( $\Delta u$ ) con la profondità durante l'evento sismico, prendendo in considerazione la porzione di terreno che si estende da una profondità di 2,5m a 22,5m dal piano campagna.

L'evento sismico di Tolmezzo ha una Durata Significativa breve. Ciò significa che tutta la sua energia viene liberata in breve tempo e con grossa intensità. Il terreno quindi, viene sottoposto ad un modesto numero di cicli ed intense sollecitazioni deviatoriche che conducono lo stato tensionale al di là della superficie di dilatanza, . Per questa ragione, in corrispondenza della fase intensa dell'evento sismico e per una analisi in cui si sviluppano  $\Delta u$  , sono evidenti le zone di colore rosso le quali evidenziano forti sovrappressioni di decompressione dovute alla dilatanza del materiale. Maggiore è la densità relativa, maggiore è la tendenza a dilatare e più elevata è l'entità della decompressione dell'acqua, che può anche divenire suzione negli elementi prossimi alla superficie libera. Superata la fase intensa dell'evento sismico, le sollecitazioni diminuiscono, il materiale torna a contrarre e quindi le sovrappressioni di compressione si accumulano progressivamente (Figura 7.3.3, Figura 7.3.4 e Figura 7.3.5).

La dissipazione delle  $\Delta u$  dipende dalla capacità che ha l'acqua di muoversi nel terreno e cioè dalla sua permeabilità. Se la permeabilità nello strato superiore è pari a  $10^{-6}$  m/s (Figura 7.3.5 e Figura 7.3.8), le sovrappressioni che si generano nello strato rimangono internamente ad esso per tutta la durata dell'evento sismico. I due strati perciò sono sostanzialmente idraulicamente “indipendenti” e il processo di consolidazione, di fatto, si attiva nella fase post-sisma.

Se la permeabilità del terreno invece è omogenea con valore pari a  $10^{-4}$  m/s (Figura 7.3.3 e Figura 7.3.6), la dissipazione delle sovrappressioni avviene già durante l'evento sismico e il loro completo annullamento si raggiunge solo dopo 50 secondi circa. Le  $\Delta u$  che si generano nello strato inferiore, a

causa della sua maggiore rigidezza e densità relativa, sono inizialmente di modesta entità. L'acqua pertanto, a causa dell'elevato gradiente idraulico tra i due strati, tende a muoversi dallo strato superiore a quello inferiore. Il flusso incrementa progressivamente le sovrappressioni interstiziali nello strato inferiore riducendo così il gradiente idraulico e la sua funzione di drenaggio.

Infine, se la permeabilità dello strato superiore è pari a  $10^{-5}$  m/s (Figura 7.3.4 e Figura 7.3.7), la dissipazione delle  $\Delta u$  avviene solamente in alcune zone molto prossime sia al contatto stratigrafico sia alla condizione al contorno superiore. La restante parte del terreno appartenente allo strato accumula  $\Delta u$  per poi dissiparle a partire dalla fine dell'evento sismico.

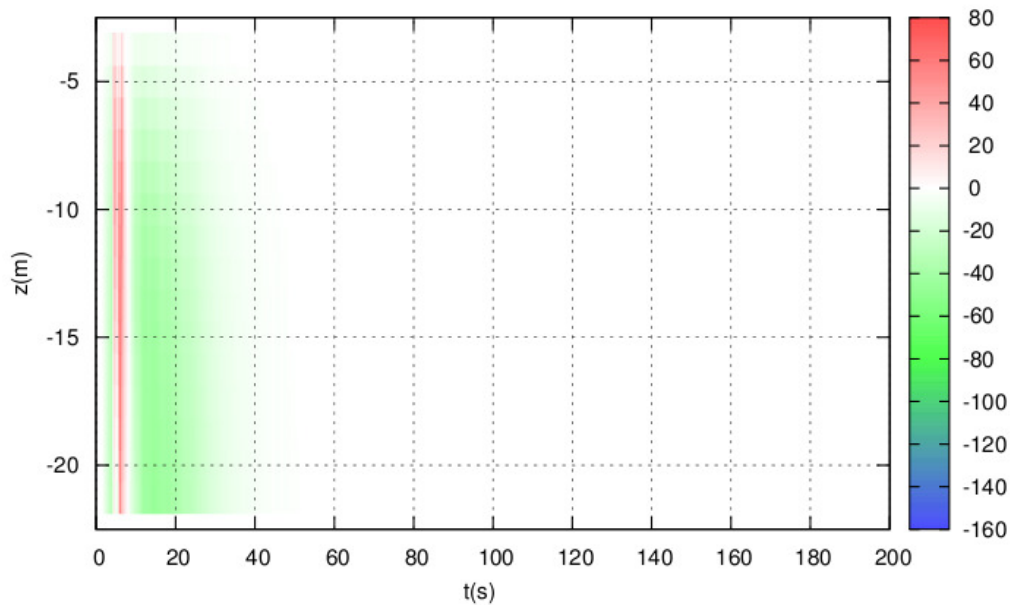


Figura 7.3.3:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $D_r=85\%$  e permeabilità  $K = 10^{-4}$  m/s. Segno negativo di compressione.

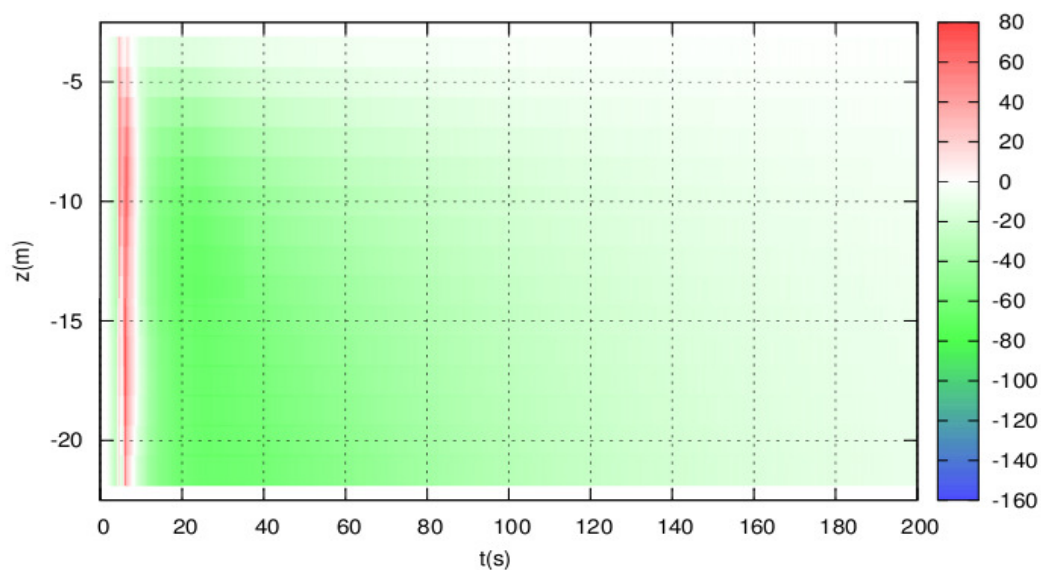


Figura 7.3.4:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $D_r=85\%$  e permeabilità  $K = 10^{-5}$  m/s. Segno negativo di compressione.

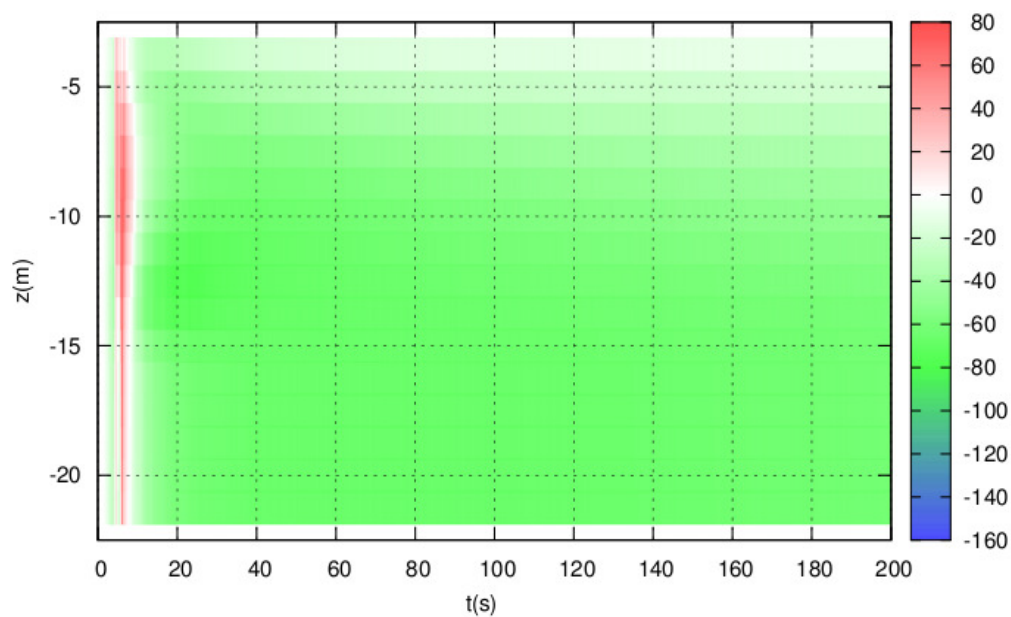


Figura 7.3.5:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $D_r=85\%$  e permeabilità  $K = 10^{-6}$  m/s. Segno negativo di compressione.

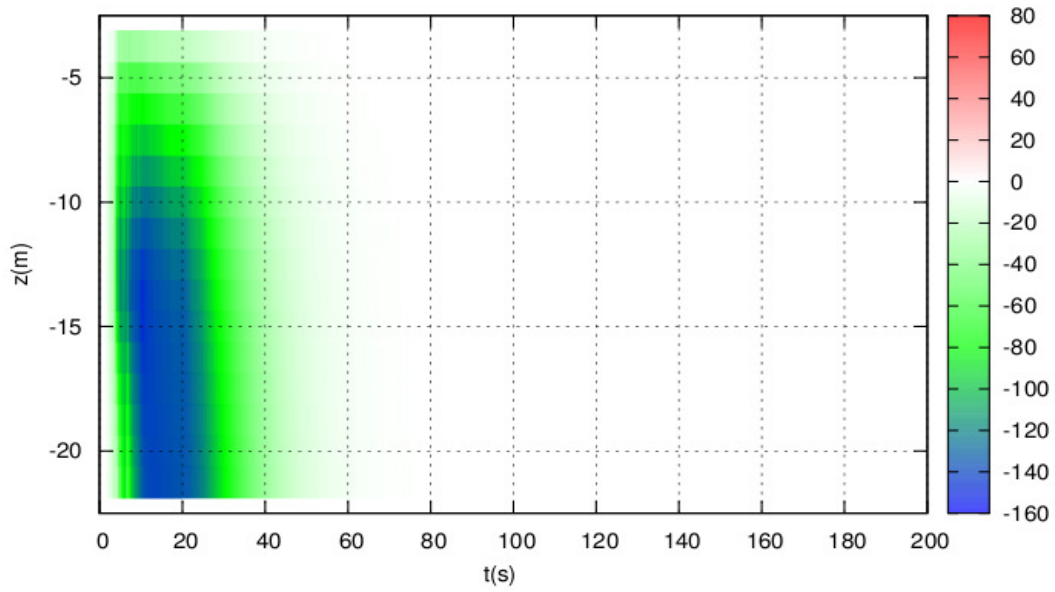


Figura 7.3.6:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $D_r=55\%$  e permeabilità  $K = 10^{-4}$  m/s. Segno negativo di compressione.

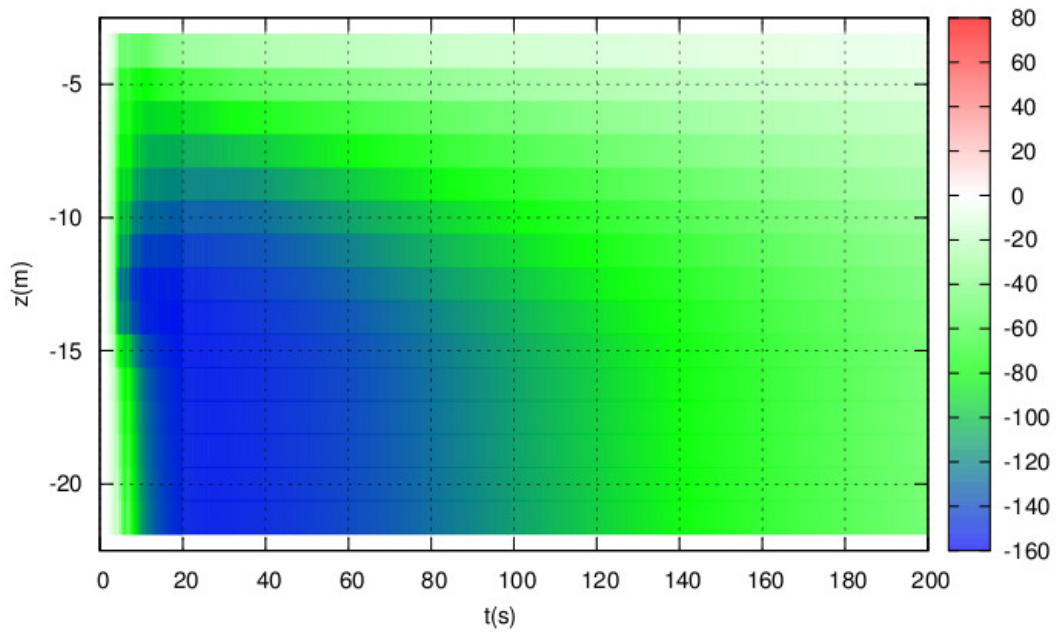


Figura 7.3.7:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $D_r=55\%$  e permeabilità  $K = 10^{-5}$  m/s. Segno negativo di compressione.

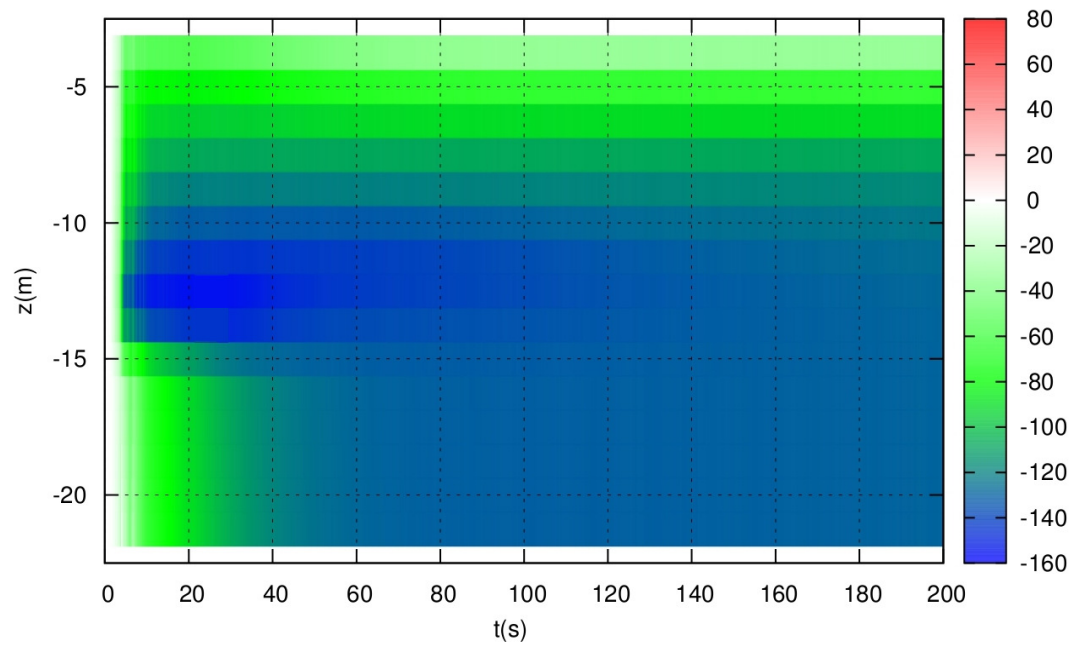
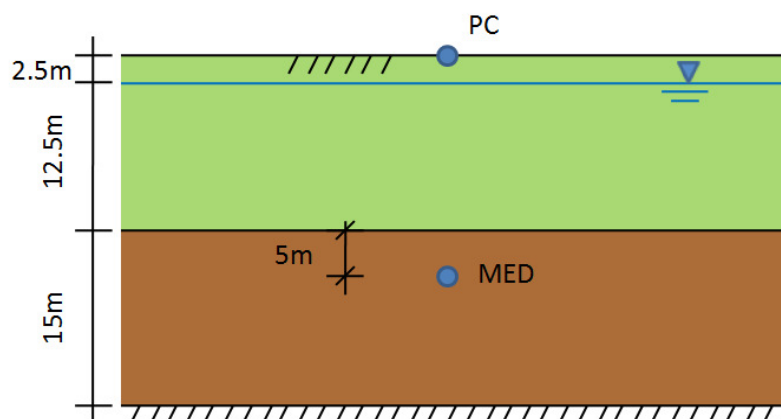


Figura 7.3.8:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $D_r=55\%$  e permeabilità  $K = 10^{-6}$  m/s. Segno negativo di compressione.



### 7.3.2.2 Risposta sismica in superficie

La propagazione del moto lungo la colonna è stata valutata registrando la storia temporale delle velocità (in direzione orizzontale) nel tempo in due punti: uno in corrispondenza del piano campagna (PC) e l'altro (MED) appartenente allo strato inferiore e posizionato a 5m dal contatto tra gli strati.



L'esame delle storie temporali della velocità (in direzione orizzontale) nel punto MED ha mostrato una perfetta sovrapposizione delle risposte, indipendentemente dalle condizioni di drenaggio dei due strati e dalla densità relativa dello strato superiore.

La risposta della colonna in corrispondenza del piano campagna (PC), invece, ha evidenziato una forte dipendenza dallo stato di addensamento dello strato superiore e i risultati di questo studio sono stati rappresentati in Figura 7.3.9, Figura 7.3.10, Figura 7.3.11, Figura 7.3.12, Figura 7.3.13, Figura 7.3.14 e Figura 7.3.15.

E' stato opportuno sottolineare i seguenti aspetti:

- Per  $D_r$  compresa tra 85 e 80%, la risposta non è influenzata in alcun modo dalle condizioni di drenaggio degli strati. I profili di velocità sono perfettamente sovrapposti (Figura 7.3.9 e Figura 7.3.10).
- Per  $D_r$  compresa tra 75 e 65%, la risposta ottenuta con le analisi di consolidazione è molto simile a quella ottenuta con una analisi perfettamente non drenata. L'analisi in condizioni drenate invece mostra lo stesso andamento per i primi 7 secondi per poi sovrastimare la risposta per la restante parte dell'evento sismico (Figura 7.3.11 e Figura 7.3.12).
- Per  $D_r$  inferiore a 65% solo il primo picco in corrispondenza di 4 secondi circa, è comune a tutte le analisi (Figura 7.3.13, Figura 7.3.14 e Figura 7.3.15). La risposta in condizioni drenate

sovrastima tutte le altre mentre le analisi in condizioni non drenate e di consolidazione (con permeabilità pari a  $10^{-6}$  m/s) inducono una risposta molto più contenuta. Solo nel caso di  $D_r$  pari a 55%, queste condizioni portano alla liquefazione dell'intero strato superiore.

Proprio in quest'ultimo caso è possibile notare l'importanza della permeabilità nei confronti della liquefazione. In Figura 7.3.16 e Figura 7.3.17 sono state rappresentate le evoluzioni temporali della quantità:  $(p'_0 - p'(t))/p'_0$  nella porzione di terreno che si trova da -2.5m a -22.5m dal piano campagna. La grandezza  $p'_0$  rappresenta la pressione efficace media in condizioni litostatiche, prima dell'evento sismico mentre  $p'(t)$  rappresenta la pressione efficace media all'istante  $t$ . Il fattore, quindi, è pari a zero prima dell'evento sismico mentre raggiunge l'unità se il terreno liquefa.

In Figura 7.3.16 è possibile notare che, se la permeabilità dello strato superiore è pari a  $10^{-6}$  m/s, questo fattore tende all'unità in tutto lo strato a partire da 10 secondi. In questa condizione lo strato superiore accumula pressioni interstiziali positive durante l'evento sismico, non essendo in grado di dissiparle con sufficiente velocità. Se invece la permeabilità è pari a  $10^{-4}$  m/s, il fattore raggiunge l'unità solamente in corrispondenza del centro dello strato e all'istante  $t = 10$  s circa.

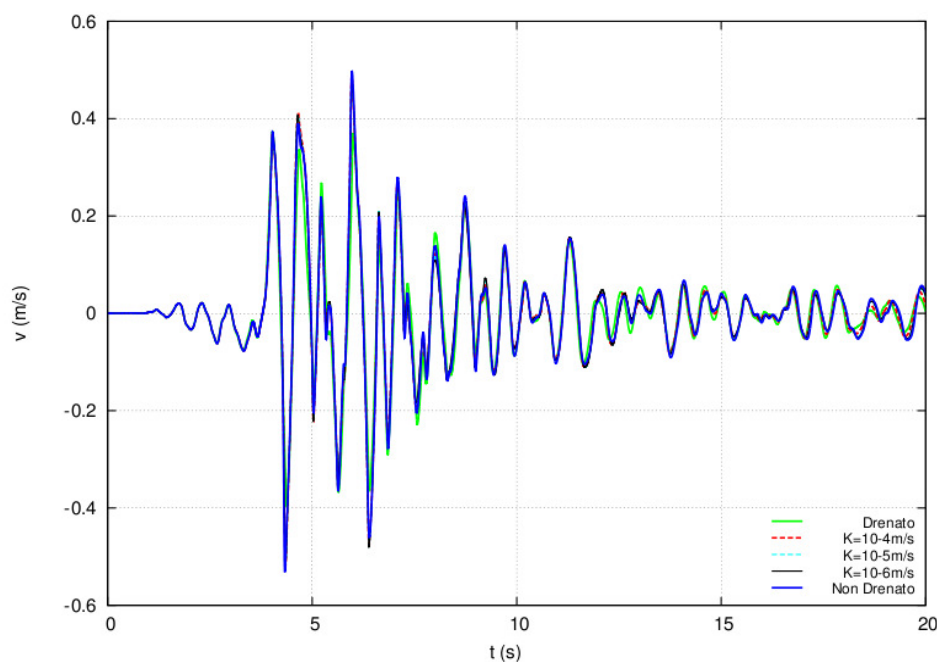


Figura 7.3.9: Storia temporale delle velocità in superficie.  $D_r 85\%$

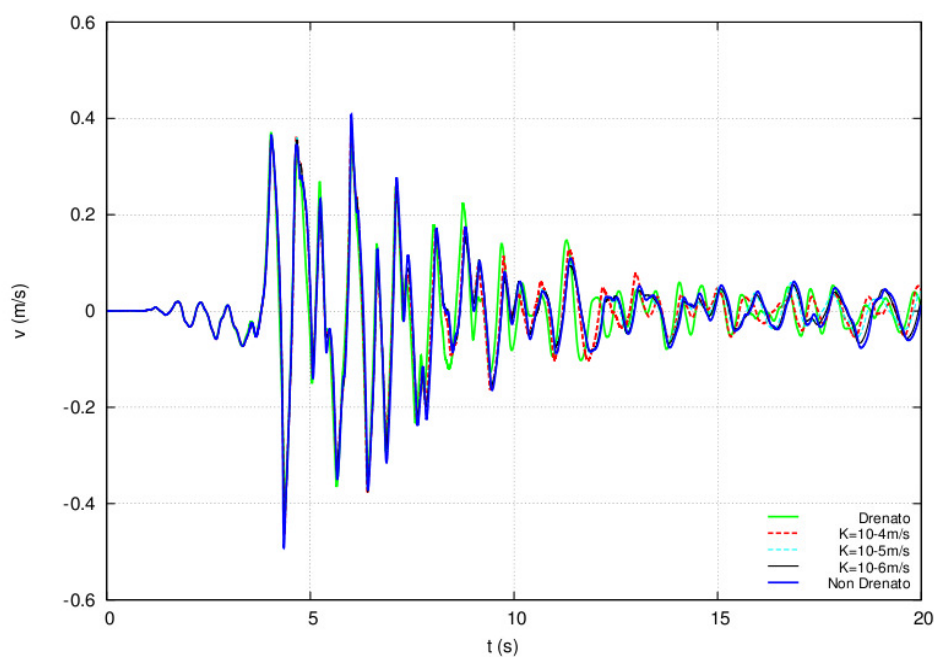


Figura 7.3.11: Storia temporale delle velocità in superficie. Dr75%

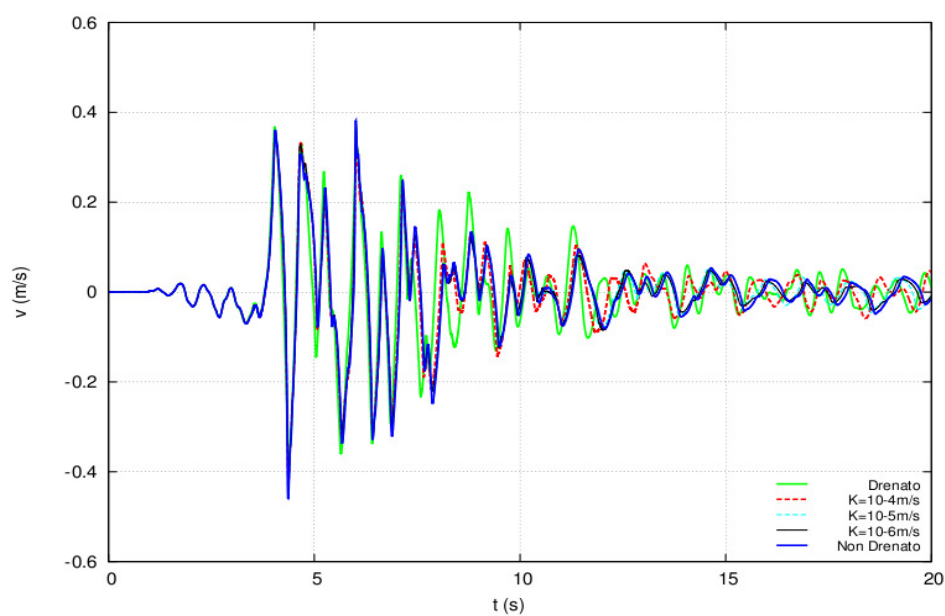


Figura 7.3.12: Storia temporale delle velocità in superficie. Dr70%

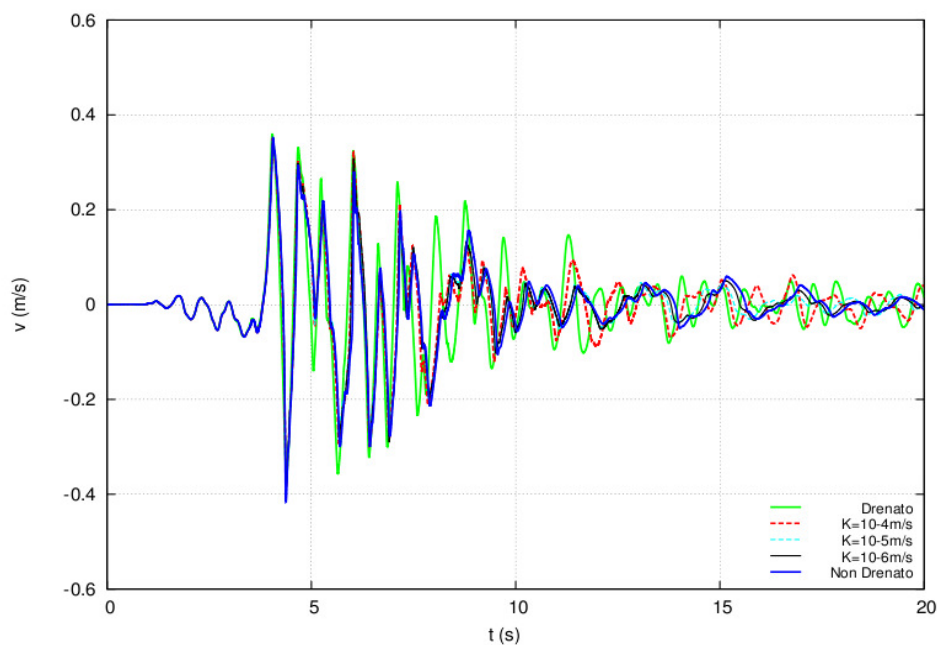


Figura 7.3.13: Storia temporale delle velocità in superficie. Dr65%

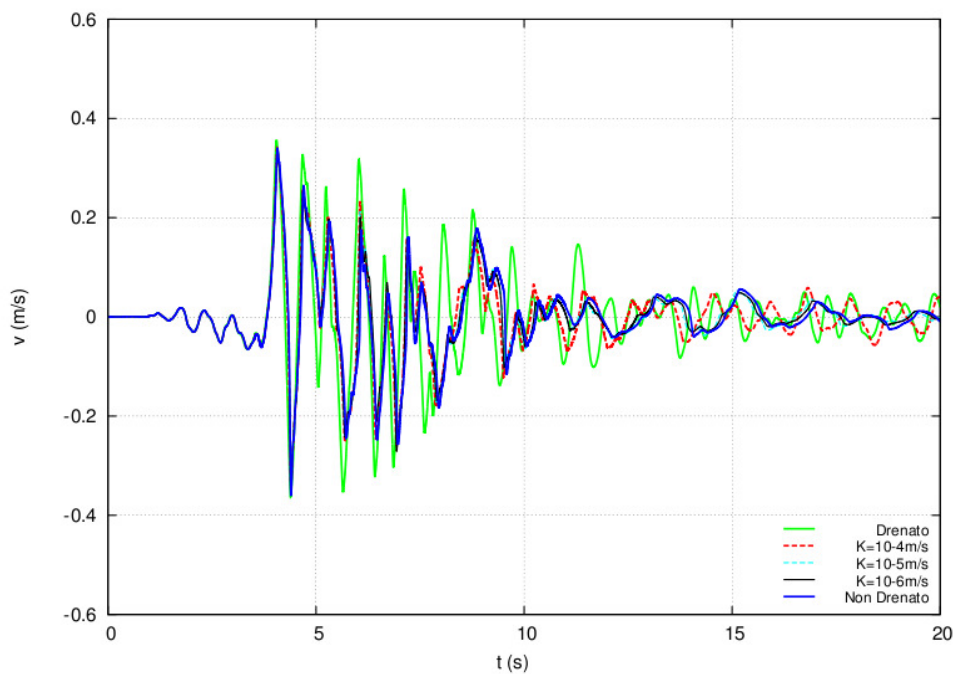


Figura 7.3.14: Storia temporale delle velocità in superficie. Dr60%

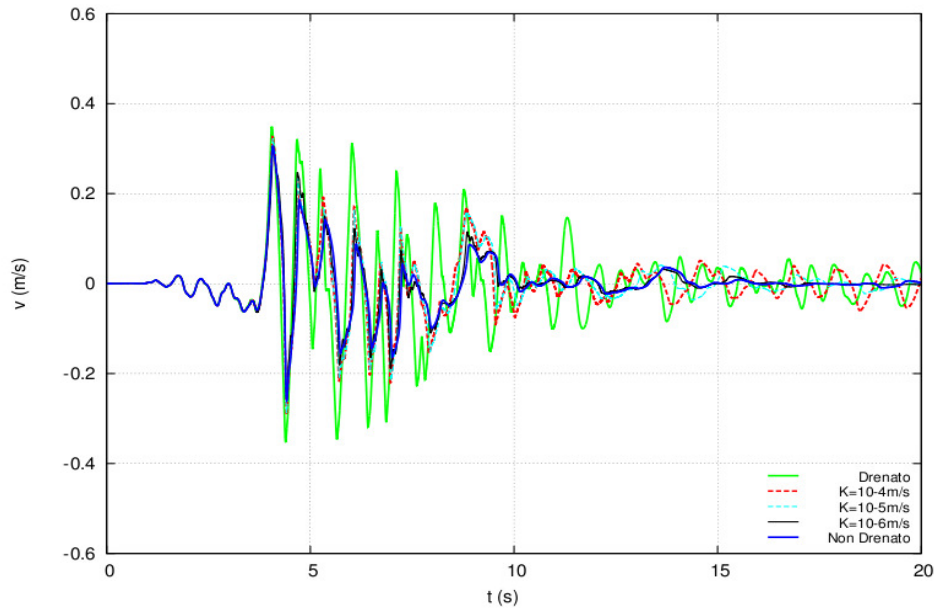


Figura 7.3.15: Storia temporale delle velocità in superficie. Dr55%

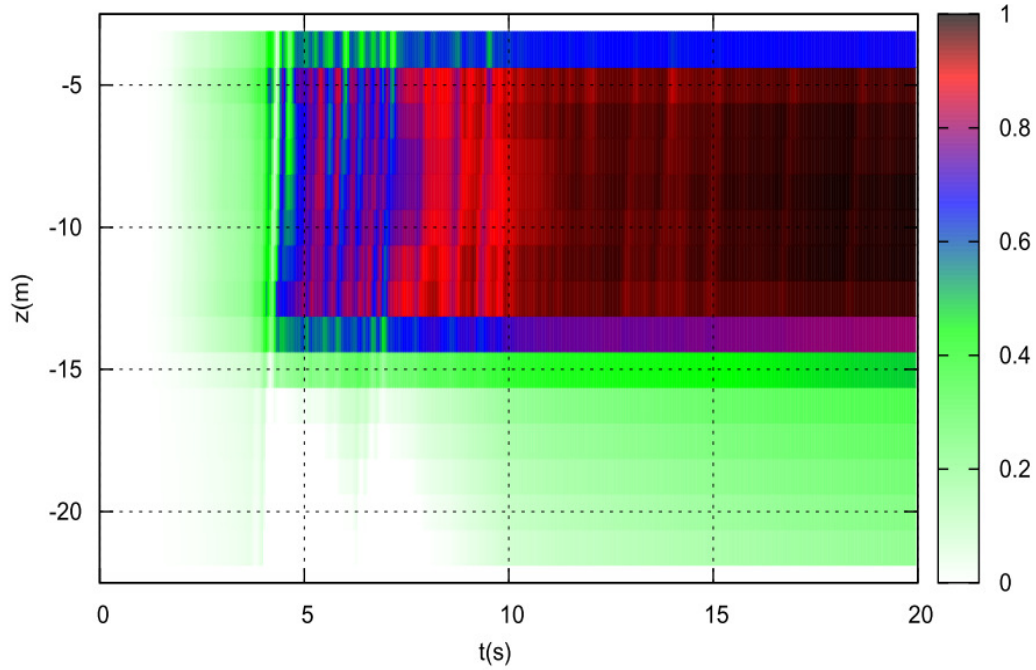


Figura 7.3.16: Evoluzione temporale delle fattore  $(p'_0 - p'(t)) / p'_0$  in funzione del tempo durante l'evento sismico di Tolmezzo. Dr=55% e permeabilità dello strato superiore pari a  $10^{-6}$ m/s.

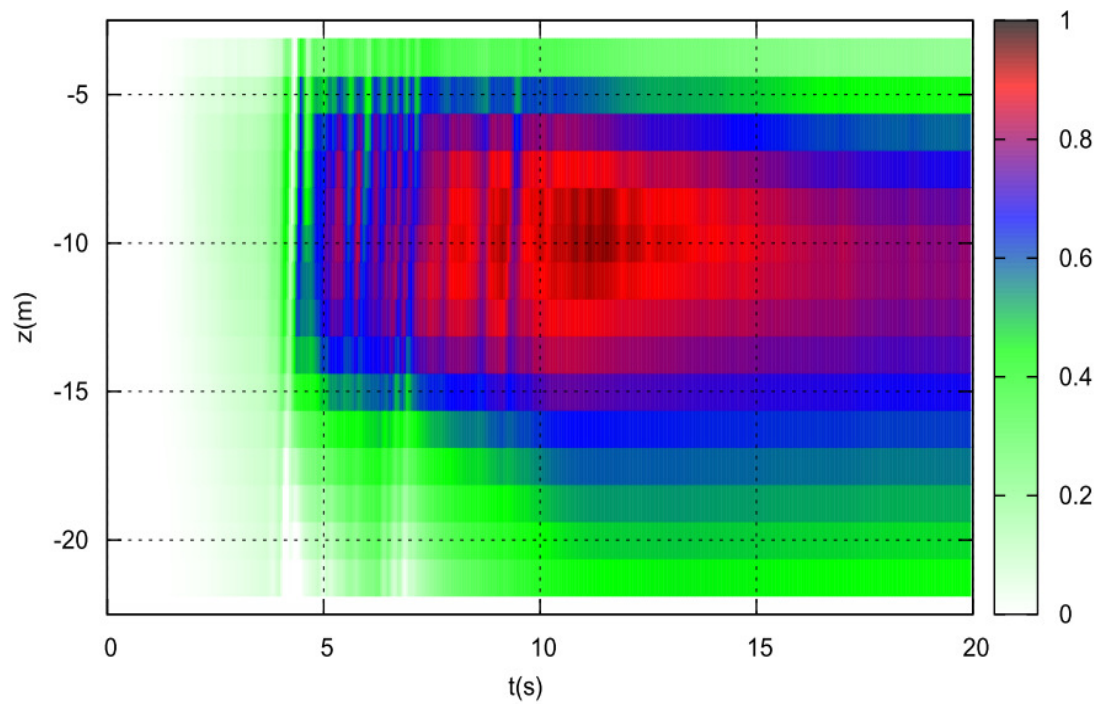


Figura 7.3.17: Evoluzione temporale delle fattore  $(p'_0 - p'(t)) / p'_0$  in funzione del tempo durante l'evento sismico di Tolmezzo.  $D_r=55\%$  e permeabilità dello strato superiore pari a  $10^{-4}$  m/s.

### **7.3.2.3 Cedimenti in superficie**

In Figura 7.3.18 e Figura 7.3.19 è stato rappresentato il cedimento del piano campagna sia per le analisi perfettamente drenate sia per quelle di consolidazione. I risultati ottenuti con analisi perfettamente non drenate, invece, sono stati trascurati poiché il cedimento dipende esclusivamente dal contributo dello strato inferiore e della porzione sopra falda dello strato superiore. Complessivamente i due contributi sono molto modesti essendo lo strato inferiore particolarmente denso e la porzione sopra falda di spessore limitato.

In condizioni perfettamente drenate il valore massimo del cedimento si raggiunge sempre in corrispondenza della fine dell'evento sismico. Se invece l'analisi viene condotta considerando anche la consolidazione, il cedimento si riduce in valore assoluto per effetto della generazione di sovrappressioni interstiziali e raggiunge un valore pari al 30 - 40% di quello ottenuto dall'analisi drenata (Figura 7.3.19).

Soltanto per valori di addensamento superiori al 70% si evidenzia un forte movimento sussultorio durante la fase intensa dell'evento sismico dovuto alla dilatanza ed è particolarmente accentuato nelle analisi drenate. Proprio la considerevole tendenza a dilatare dei materiali densi ( $D_r=85\%$ , Figura 7.3.18), induce un sollevamento del piano campagna tale che il valore del cedimento finale in condizioni drenate è minore di quello ottenuto con analisi di consolidazione.

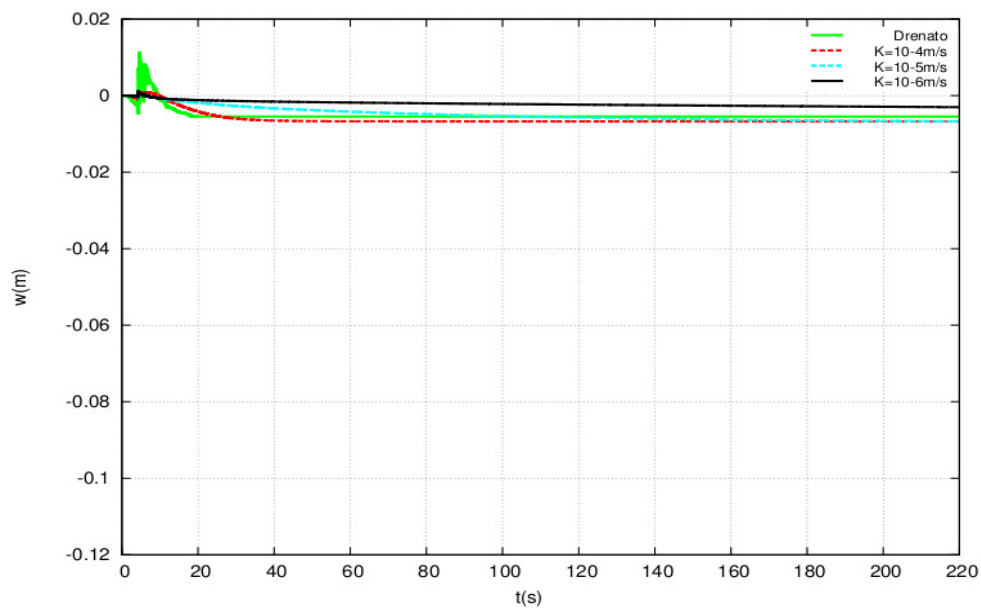


Figura 7.3.18: Storia temporale dei cedimenti in superficie. Strato superiore con  $Dr=85\%$ .

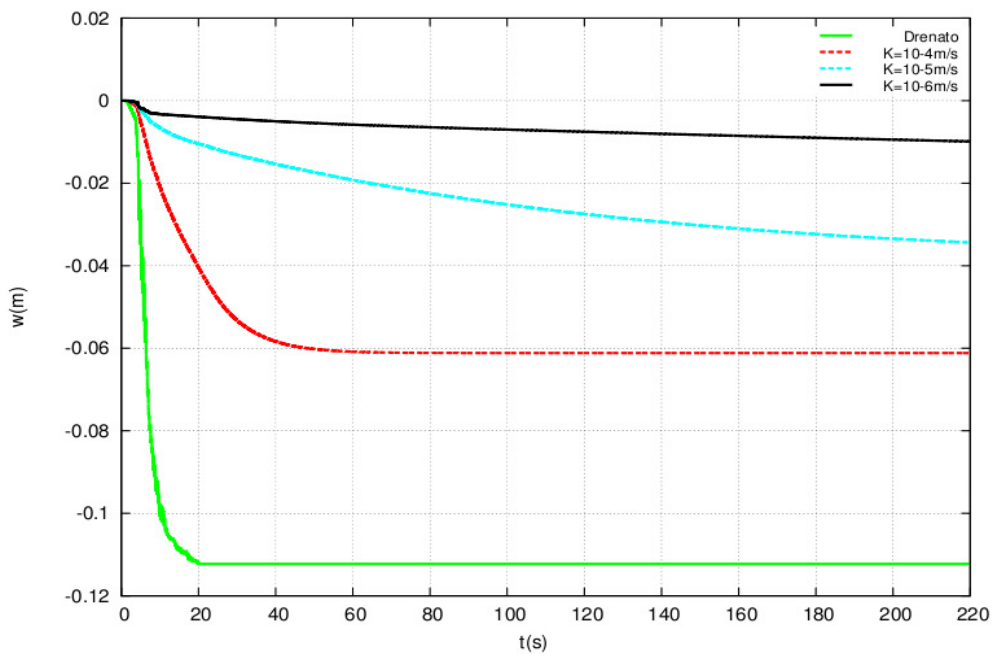


Figura 7.3.19: Storia temporale dei cedimenti in superficie. Strato superiore con  $Dr=55\%$ .



### 7.3.2.4 Deformazioni di taglio massime

In Figura 7.3.21 e Figura 7.3.22 sono stati rappresentati gli involuipi di deformazione massima di taglio con la profondità raggiunti alla fine dell'evento sismico. I valori nei due strati sono nettamente diversi tra loro. Nello strato inferiore la deformazione è pressoché costante ed indipendente sia dall'indice dei vuoti dello strato superiore sia dalle condizioni di drenaggio. Nello strato superiore invece, la deformazione massima raggiunge valori da 4 a 8 volte quelli dello strato inferiore. I valori massimi in corrispondenza dell'interfaccia si verificano solamente per effetto della massima sollecitazione applicata alla base del modello e non sono prodotti dal progressivo accumulo di deformazioni residue durante i cicli del terremoto (Figura 7.3.20). Infatti, l'accumulo della componente non reversibile degli spostamenti risulta particolarmente significativa se la durata dell'evento sismico è importante ma questo aspetto è stato affrontato nel paragrafo 7.3.3.3 e nel Capitolo 8.

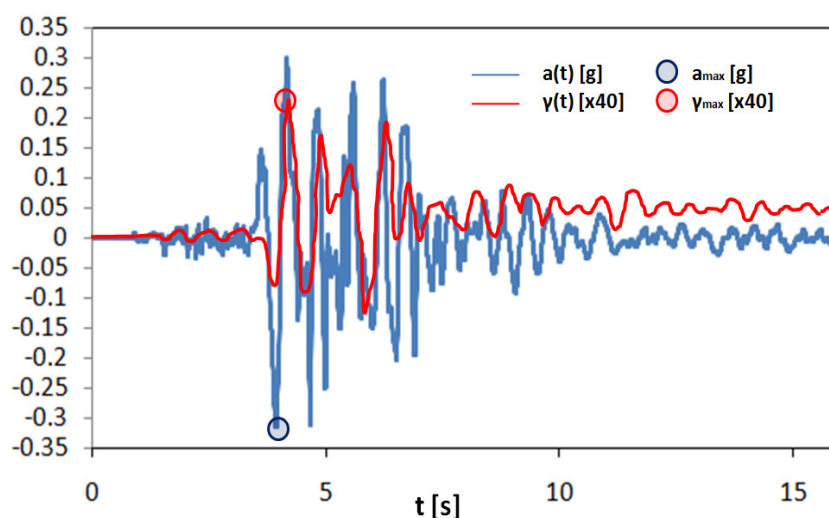


Figura 7.3.20: Storia temporale delle accelerazioni applicate alla base del modello e la storia delle deformazioni di taglio dello strato superiore registrate al contatto stratigrafico.  
Analisi di consolidazione –  $K=10^{-4}$  m/ .  $Dr=85\%$  dello strato superiore.

Dall'analisi dei risultati emerge anche la forte dipendenza dalla densità relativa, dalle condizioni di drenaggio e dal numero di cicli del terremoto. Se la densità relativa è alta, le sovrappressioni interstiziali sono modeste e le curve sono molto vicine tra loro. In particolare, per un evento sismico breve ed intenso come quello di Tolmezzo, per effetto della massima sollecitazione applicata alla base, il terreno tende a dilatare inducendo sovrappressioni interstiziali di decompressione che aumentano le tensioni efficaci migliorando il comportamento del materiale. In Figura 7.3.21 quindi è evidente che la differenza quantitativa tra le deformazioni massime raggiunte in condizioni non drenate e quelle in condizioni drenate è dovuta principalmente alla dilatanza del materiale. Viceversa, se la densità relativa è modesta

( $Dr=55\%$ ), le sovrappressioni interstiziali sono principalmente di compressione e i risultati delle analisi drenate sono poco cautelativi (Figura 7.3.22).

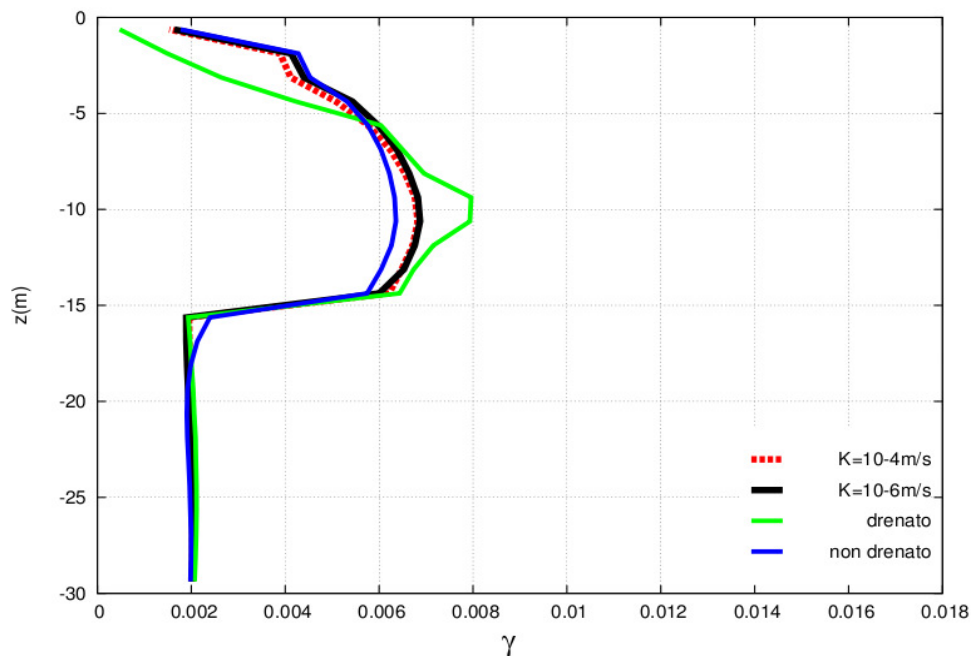


Figura 7.3.21: Deformazioni massime di taglio indotte nel terreno a seguito dell'evento sismico. Strato superiore con  $Dr=85\%$ .

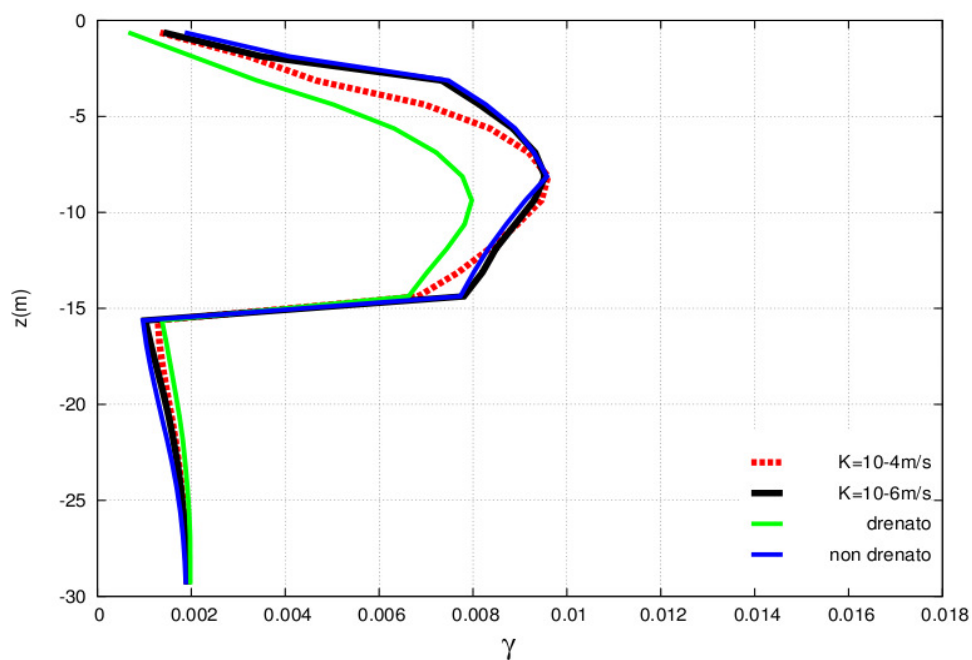


Figura 7.3.22: Deformazioni massime di taglio indotte nel terreno a seguito dell'evento sismico. Strato superiore con  $Dr=55\%$ .

### 7.3.3 Accelerogramma di Sturno

In questo paragrafo sono state esaminate soltanto alcune differenze nelle sovrappressioni interstiziali, nei cedimenti del piano campagna e nelle deformazioni di taglio massime, dovute al diverso *input sismico* applicato alla base. Le considerazioni generali illustrate precedentemente per l'evento sismico di Tolmezzo, rimangono valide anche per l'*input sismico* di Sturno.

#### 7.3.3.1 Sovrappressioni interstiziali

In Figura 7.3.23, Figura 7.3.24, Figura 7.3.25, Figura 7.3.26, Figura 7.3.27e Figura 7.3.28 è stata rappresentata la distribuzione degli incrementi di pressione interstiziale con la profondità durante l'evento sismico, prendendo in considerazione soltanto la porzione di terreno che si estende da una profondità di 2,5m a 22,5m dal piano campagna. Come affermato nel paragrafo 7.3.2.1, l'entità di tali sovrappressioni interstiziali dipende non solo dalle caratteristiche del terreno ma anche dall'*input sismico* considerato.

L'evento sismico di Sturno, a differenza di quello di Tolmezzo, ha una durata significativa molto lunga a parità di Intensità di Arias. Ciò significa che tutta l'energia del terremoto viene liberata in un tempo più lungo e con un numero di cicli più elevato dell'altro terremoto. Il terreno quindi subisce sollecitazioni deviatoriche modeste che, per la maggior parte dei casi, mantengono lo stato tensionale al di sotto della superficie di dilatanza. Per questa ragione, anche in corrispondenza della fase intensa dell'evento sismico non sono evidenti zone nelle quali si sviluppano sovrappressioni di decompressione poiché il materiale tende principalmente a contrarsi. Questo comportamento si verifica anche dalle analisi in cui la densità relativa dello strato superiore è elevata ( $D_r=85\%$ ).

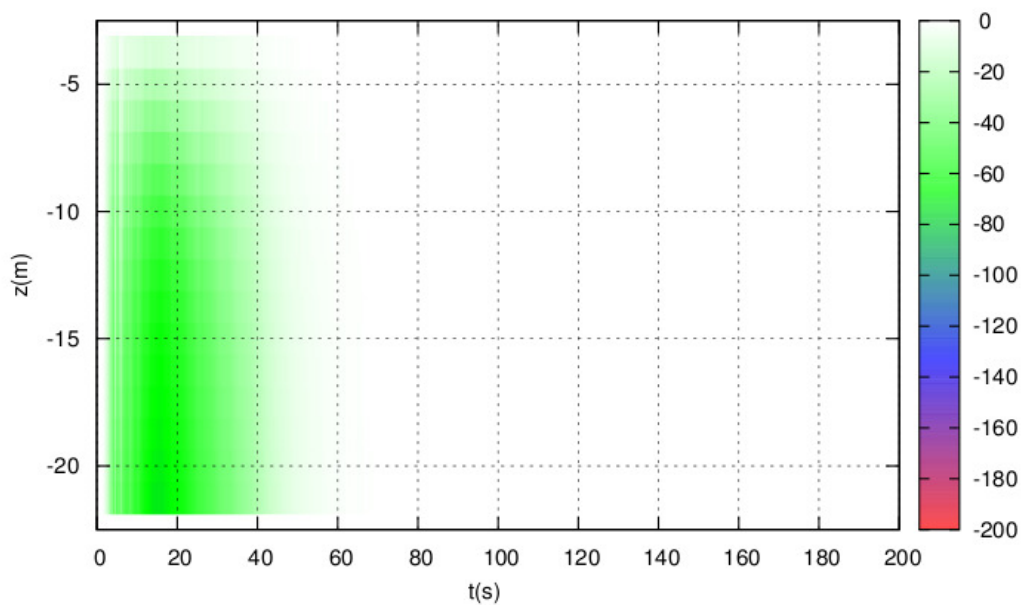


Figura 7.3.23:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $D_r=85\%$  e permeabilità  $K = 10^{-4}$  m/s. Negativo di compressione.

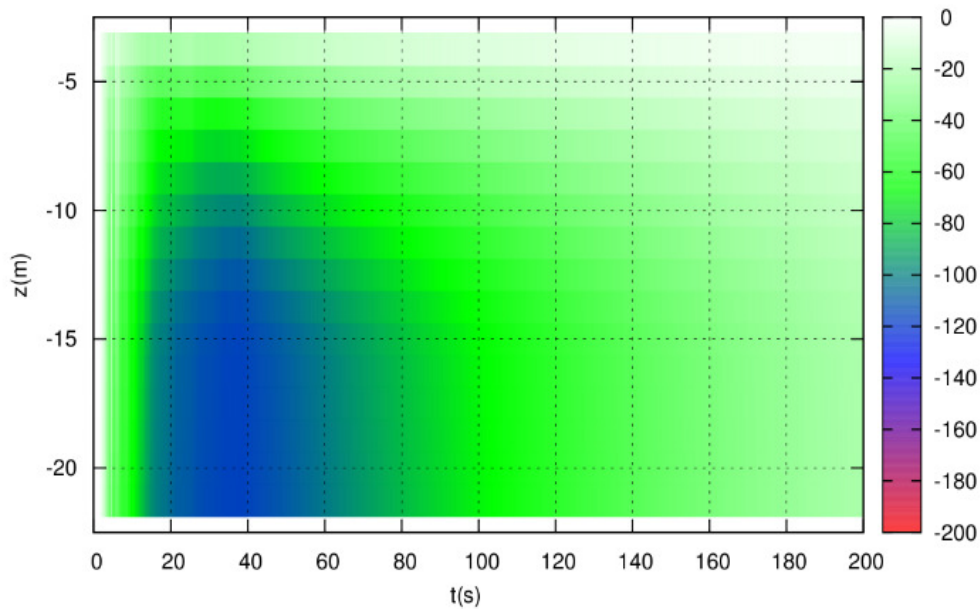


Figura 7.3.24:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $D_r=85\%$  e permeabilità  $K = 10^{-5}$  m/s. Negativo di compressione.

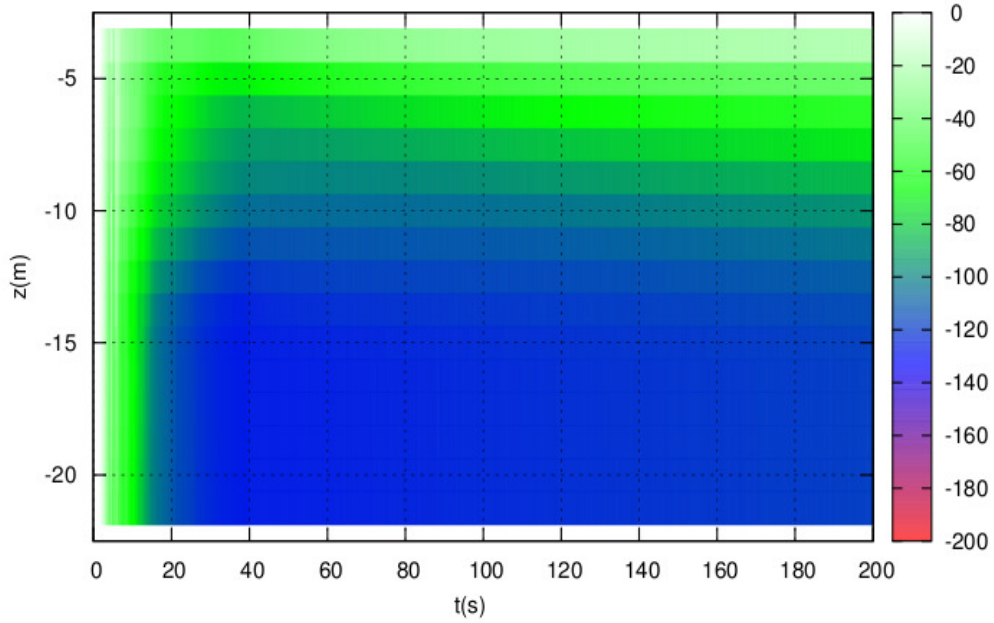


Figura 7.3.25:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $Dr=85\%$  e permeabilità  $K = 10^{-6}$  m/s. Negativo di compressione.

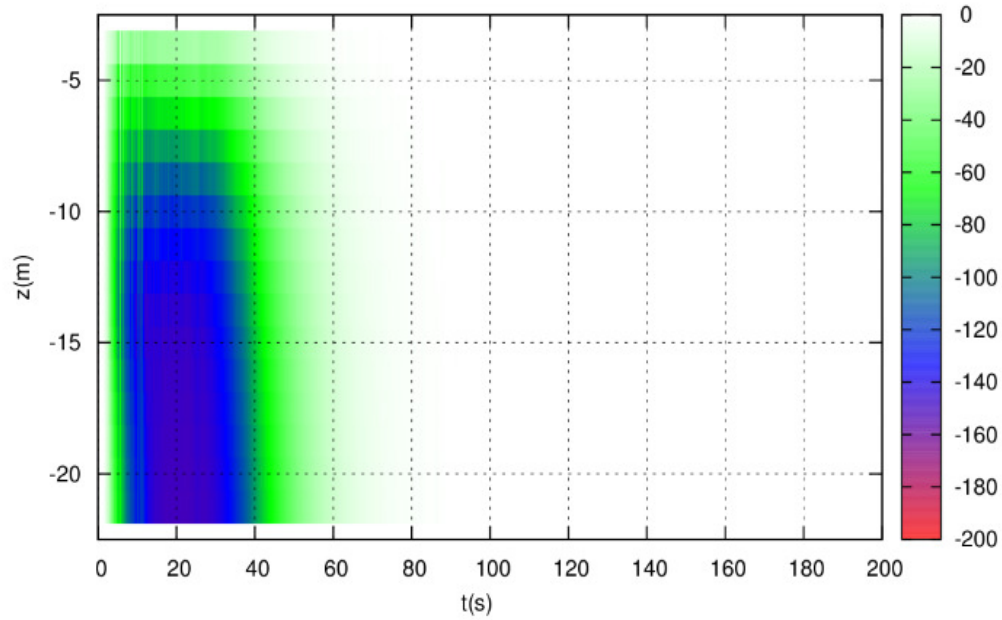


Figura 7.3.26:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $Dr=55\%$  e permeabilità  $K = 10^{-4}$  m/s. Negativo di compressione.

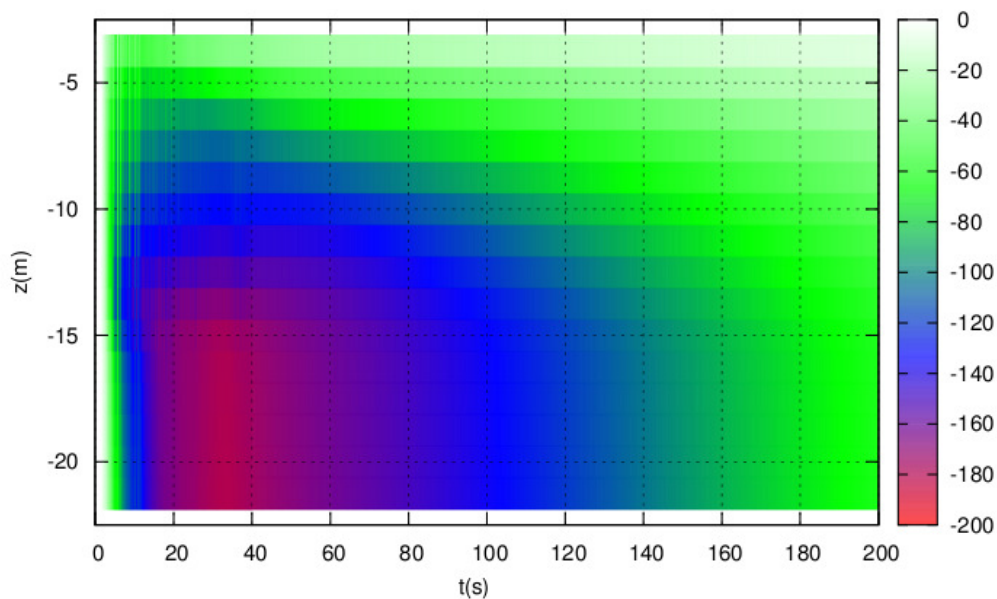


Figura 7.3.27:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $Dr=55\%$  e permeabilità  $K = 10^{-5} \text{m/s}$ . Negativo di compressione.

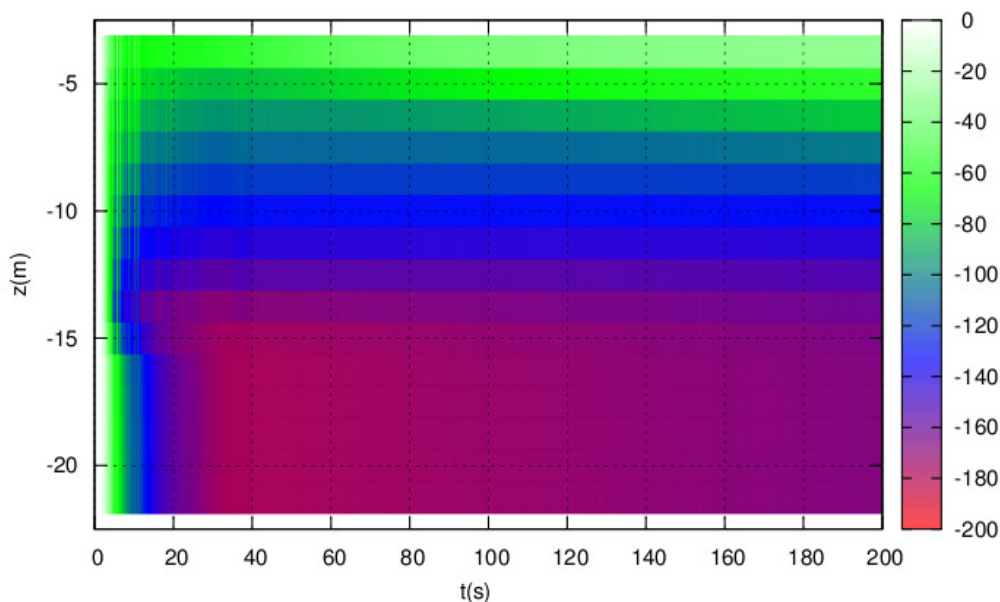


Figura 7.3.28:  $\Delta u$  durante e dopo l'evento sismico.  
Strato superiore con  $Dr=55\%$  e permeabilità  $K = 10^{-6} \text{m/s}$ . Negativo di compressione.

### 7.3.3.2 Cedimenti in superficie

In Figura 7.3.29 e Figura 7.3.30 è stato rappresentato il cedimento del piano campagna, sia per le analisi perfettamente drenate sia per quelle di consolidazione.

La forte tendenza all'addensamento dello strato superiore, dovuta alla modesta entità dei cicli del terremoto, induce un abbassamento del piano campagna sempre positivo anche nel caso di densità relativa elevata (Figura 7.3.29). Inoltre, in tutti i casi studiati, il cedimento verticale ottenuto con l'analisi in condizioni perfettamente drenate è sempre maggiore di quello calcolato dalle analisi di consolidazione. Infine, non si osservano movimenti sussultori dovuti alla dilatanza così rilevanti come quelli indotti dalla fase intensa dell'evento sismico di Tolmezzo (Figura 7.3.18).

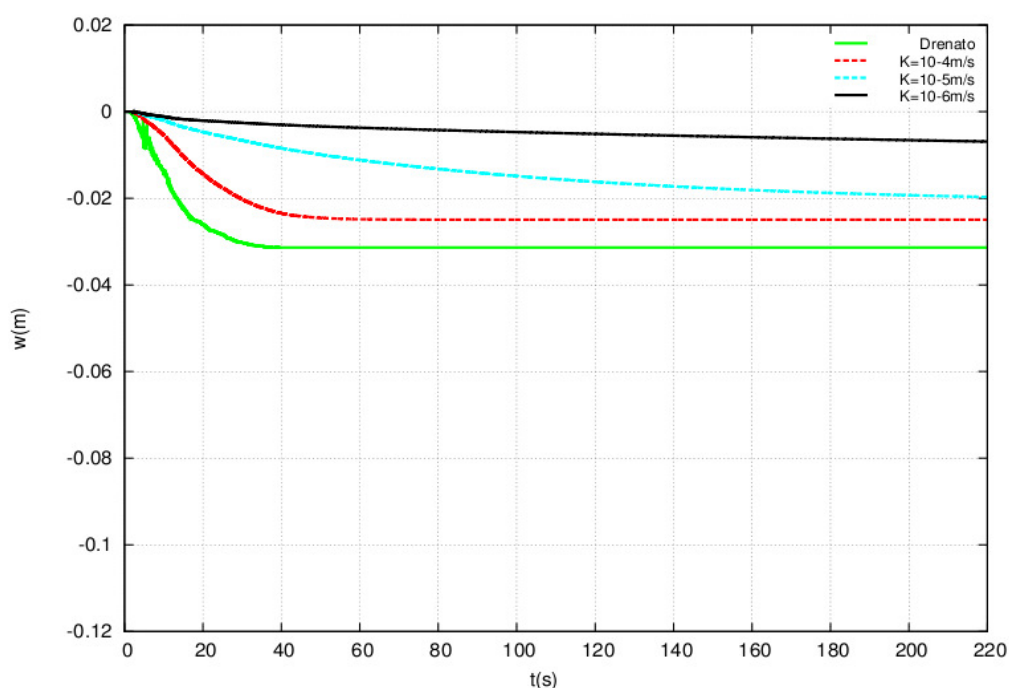


Figura 7.3.29: Storia temporale dei cedimenti in superficie. Strato superiore con  $Dr=85\%$ .

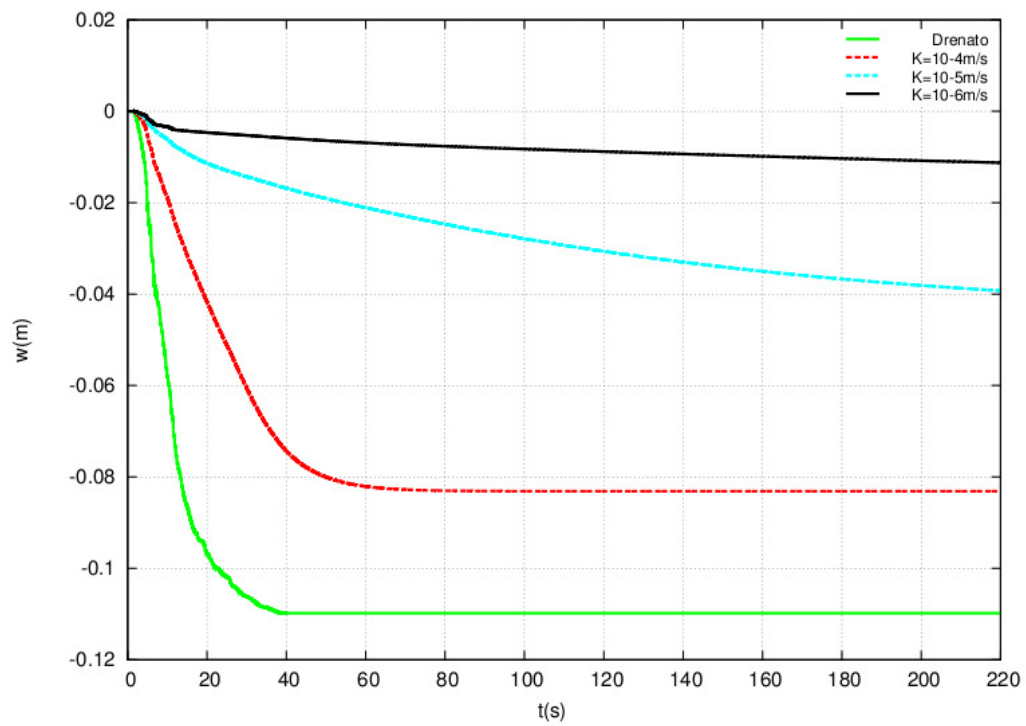


Figura 7.3.30: Storia temporale dei cedimenti in superficie. Strato superiore con  $D_r=55\%$ .



### 7.3.3.3 Deformazioni massime di taglio

Come osservato per l'evento sismico di Tolmezzo, la deformazione massima di taglio raggiunta nei due strati assume valori profondamente diversi tra di loro. L'entità dipende dal rapporto di rigidezza "equivalente" degli strati, la quale dipende a sua volta dalle sovrappressioni interstiziali generate durante l'evento sismico. Proprio questo contributo è molto significativo se la storia temporale di accelerazioni ha un numero di cicli molto elevato come per il caso di Sturno.

Inoltre l'evento sismico di Sturno ha due fasi intense, una in corrispondenza di circa 4.5 secondi e l'altra in corrispondenza di circa 10s; quest'ultima con accelerazione di picco minore della prima. Proprio la successione di queste due fasi genera nel terreno forti incrementi di pressione interstiziale che, accumulandosi, inducono deformazioni massime di taglio a seguito della seconda fase intensa.

Questo comportamento si verifica anche se l'analisi è svolta in condizioni drenate, ma in misura nettamente inferiore. Infatti, in assenza di incrementi di pressioni interstiziali, le deformazioni massime di taglio sono influenzate solo dall'accumulo della componente non reversibile. In Figura 7.3.31 è stata rappresentata, per l'analisi drenata con  $Dr=85\%$ , la storia delle deformazioni di taglio dello strato superiore registrate in corrispondenza dell'interfaccia e la storia delle accelerazioni applicate alla base del modello. E' evidente dal confronto che la deformazione massima di taglio è raggiunta in corrispondenza di 10,5s circa, molto lontano dall'istante in cui si verifica il massimo dell'accelerazione alla base ( $t=4,5s$ ).

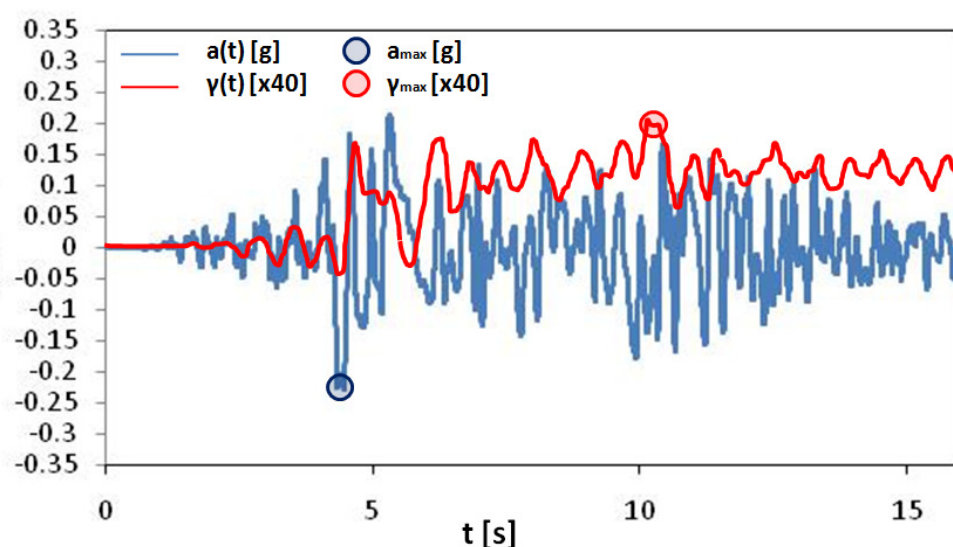


Figura 7.3.31: Storia temporale delle accelerazioni applicate alla base del modello e la storia delle deformazioni di taglio dello strato superiore registrate al contatto stratigrafico. Analisi in condizioni drenate.  $Dr=85\%$  dello strato superiore.

In conclusione è possibile notare la considerevole differenza tra le deformazioni di taglio massimo raggiunte in assenza e in presenza di incrementi di pressioni interstiziali, molto più marcata rispetto all'evento di Tolmezzo.

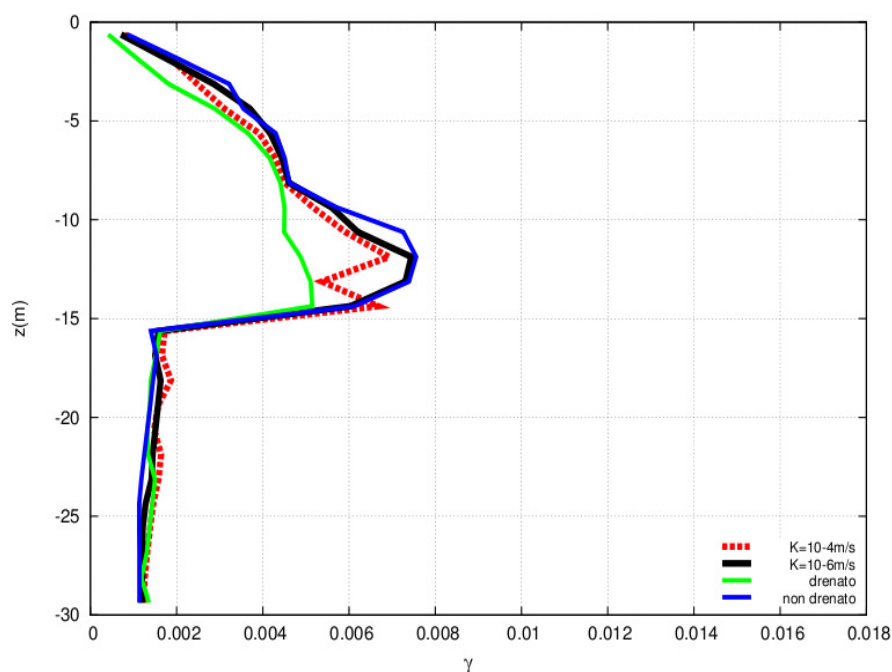


Figura 7.3.32: Deformazioni massime di taglio indotte nella colonna dall'evento sismico. Strato superiore con  $Dr=85\%$ .

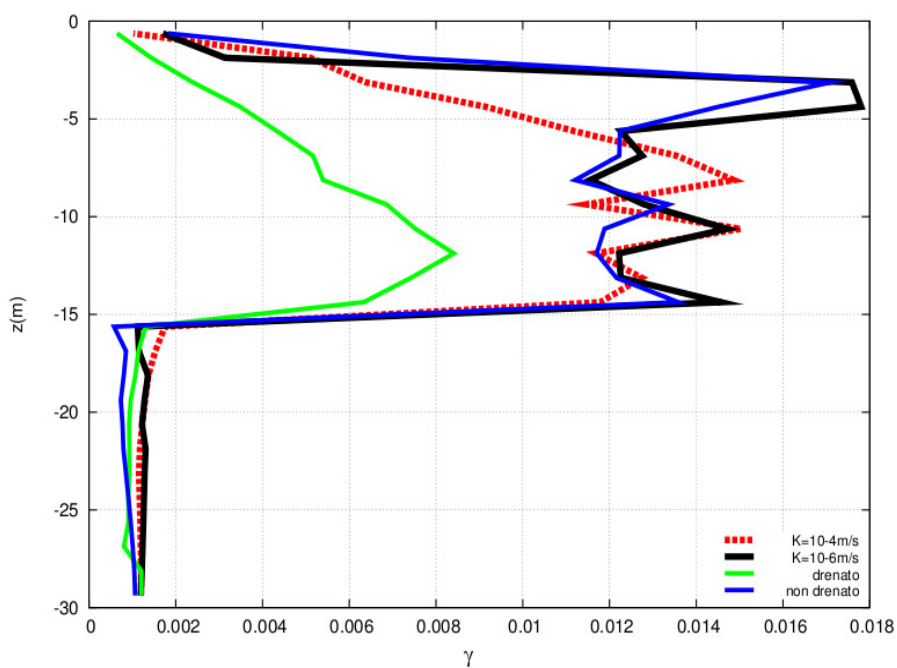


Figura 7.3.33: Deformazioni massime di taglio indotte nella colonna dall'evento sismico. Strato superiore con  $Dr=55\%$ .

## 7.4 ANALISI DI INTERAZIONE CINEMATICA PALO - TERRENO

Nelle analisi di interazione cinematica, il terreno è stato modellato con elementi isoparametrici a 27 nodi, mentre il palo è costituito da elementi tipo "*truss-beam*" collegati ai nodi della mesh con altri elementi (tridimensionali) tipo "*truss-beam*" in modo da garantire la planarità di ciascuna sezione. Il peso proprio del palo è stato attribuito ad elementi isoparametrici a 27 nodi, i quali hanno un modello elastico lineare con rigidezza molto bassa (Figura 7.4.1).

Non è stato previsto alcun elemento di interfaccia tra palo e terreno per i seguenti motivi:

- il terreno sotto falda è saturo e quello sopra falda non presenta alcuna risalita capillare;
- il criterio di resistenza è puramente attritivo;
- non è applicato alcun carico verticale in testa al palo.

L'interazione cinematica induce sollecitazioni per tutta la lunghezza del palo e modifica il moto della testa rispetto a quello di *free-field*; per questa ragione i risultati sono stati rappresentati in termini di momenti flettenti massimi lungo il palo e in termini di spettro di risposta delle accelerazioni in testa.

Le analisi di interazione hanno riguardato esclusivamente le condizioni estreme di densità relativa ( $D_r = 85\%$  e  $55\%$ ), ciascuna per i tre diametri considerati e per le tre lunghezze di infissione scelte (Figura 7.4.2, Figura 7.4.3 e Figura 7.4.4). Inoltre, nelle analisi di consolidazione è stato trascurato il caso in cui lo strato superiore abbia una permeabilità di  $10^{-5}$  m/s.

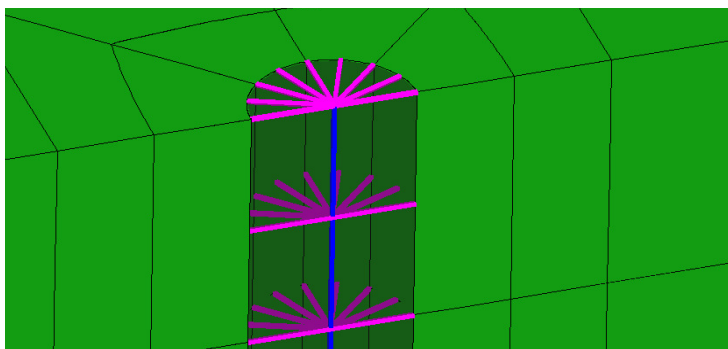


Figura 7.4.1: Particolare del palo. Linea d'asse e braccetti rigidi.

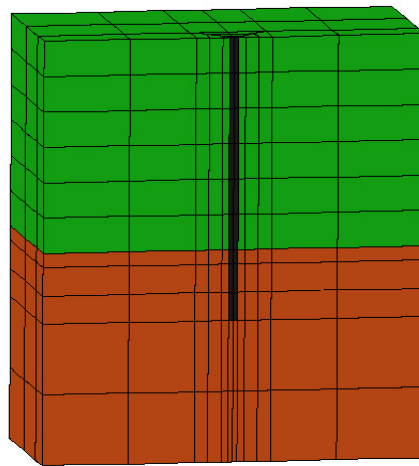


Figura 7.4.2: Modello agli elementi finiti relativo al palo con diametro  $D = 0.6\text{m}$ .

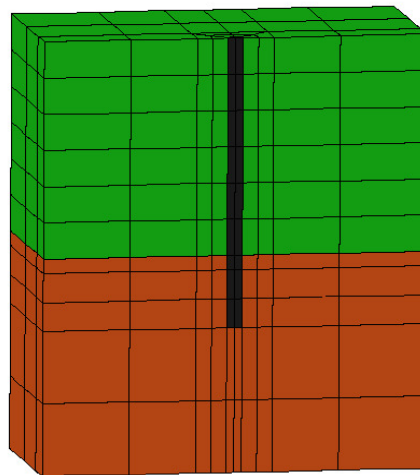


Figura 7.4.3: Modello agli elementi finiti relativo al palo con  $D=1\text{m}$ .

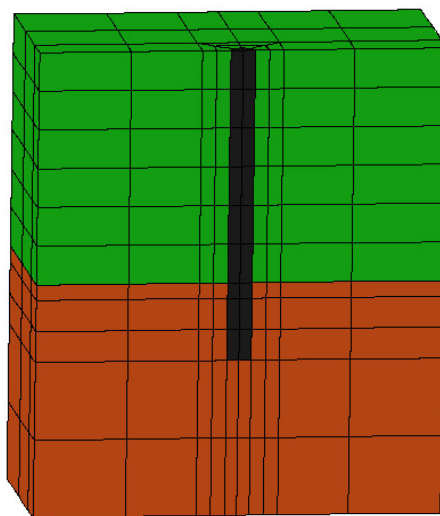


Figura 7.4.4: Modello agli elementi finiti relativo al palo con  $D=1.5\text{m}$

### 7.4.1 Momenti flettenti massimi

Nelle Figure 7.4.6, 7.4.7, 7.4.8 e 7.4.9 sono stati rappresentati solamente gli involucri dei momenti flettenti massimi lungo il palo, di diametro pari a 1m ed immerso per 5 m ( $L_p=5m$ ) nello strato inferiore, per ciascuna delle due situazioni stratigrafiche esaminate.

Se il palo è libero di ruotare in testa, i momenti flettenti massimi si hanno solo in corrispondenza dell'interfaccia tra i due strati; si localizzano invece in testa se la rotazione è impedita, con valori generalmente maggiori che non all'interfaccia. Nei casi esaminati, sia per il palo di diametro 0.6m sia per quello di 1m, la presenza del vincolo in testa si risente fino a 7-8 diametri di profondità, cosicché i valori del momento all'interfaccia risultano indipendenti da tale vincolo.

Per quel che concerne il palo di diametro paria 1.5m, si ha invece un'interazione, seppur di modesta entità, tra la sezione alla testa del palo e quella all'interfaccia, cosicché l'effetto del vincolo applicato alla testa del palo si ripercuote anche in corrispondenza della sezione all'interfaccia (Figura 7.4.5).

Inoltre, risulta opportuno sottolineare che in molti di questi casi le sollecitazioni flettenti raggiungono o eccedono i momenti di plasticizzazione del palo, testimoniando così l'importanza in termini quantitativi di questo fenomeno d'interazione.

Infine, tale studio ha messo in luce il contributo di alcuni aspetti nei riguardi delle sollecitazioni flettenti. In particolare, è stato preso in esame l'effetto delle pressioni interstiziali generate durante l'evento sismico, la lunghezza di palo nello strato inferiore ( $L_p$ ) e la sua rigidità flessionale.

#### **7.4.1.1     *Effetto dell'incremento delle pressioni interstiziali***

I momenti massimi crescono al diminuire della densità relativa poiché aumenta il contrasto di rigidità tra gli strati. Inoltre, proprio per basse densità relative, le analisi drenate sottostimano le sollecitazioni poiché non tengono conto degli incrementi di pressione interstiziale; tali differenze sono ancora più marcate per eventi sismici con elevato numero di cicli.

Facendo riferimento alle sollecitazioni indotte in corrispondenza del contatto stratigrafico a seguito dell'evento sismico di Sturno, è importante notare che se la densità relativa è elevata, i momenti flettenti massimi dipendono poco dagli incrementi di pressione interstiziale poiché essi sono causati solo dalla

prima fase intensa della storia temporale (Figura 7.4.12). Il numero di cicli compiuti dal terreno fino a quel punto è modesto e non è sufficiente ad indurre elevate sovrappressioni interstiziali. Se invece la densità relativa è più bassa, gli incrementi di pressioni interstiziali hanno un ruolo significativo. Essi, infatti, accumulandosi al procedere dei cicli, fanno raggiungere al palo le sollecitazioni massime per effetto della seconda fase intensa dell'evento sismico (Figura 7.4.13). Le sollecitazioni massime calcolate con le analisi drenate, invece, non tenendo conto di questo contributo, sono dovute sempre alla prima fase intensa anche nelle condizioni di terreno sciolto e perciò tendono sempre a sottostimare le corrette sollecitazioni indotte.

Infine, per quanto riguarda l'evento sismico di Tolmezzo, le sollecitazioni massime nella sezione al contatto stratigrafico sono indotte sempre dall'unica fase intensa della storia temporale delle accelerazioni che viene raggiunta dopo 4,2s circa (Figura 7.4.10 e Figura 7.4.11). Il numero di cicli compiuti fino al quell'istante è modesto e il contributo delle sovrappressioni interstiziali è meno significativo rispetto al caso di Sturno.

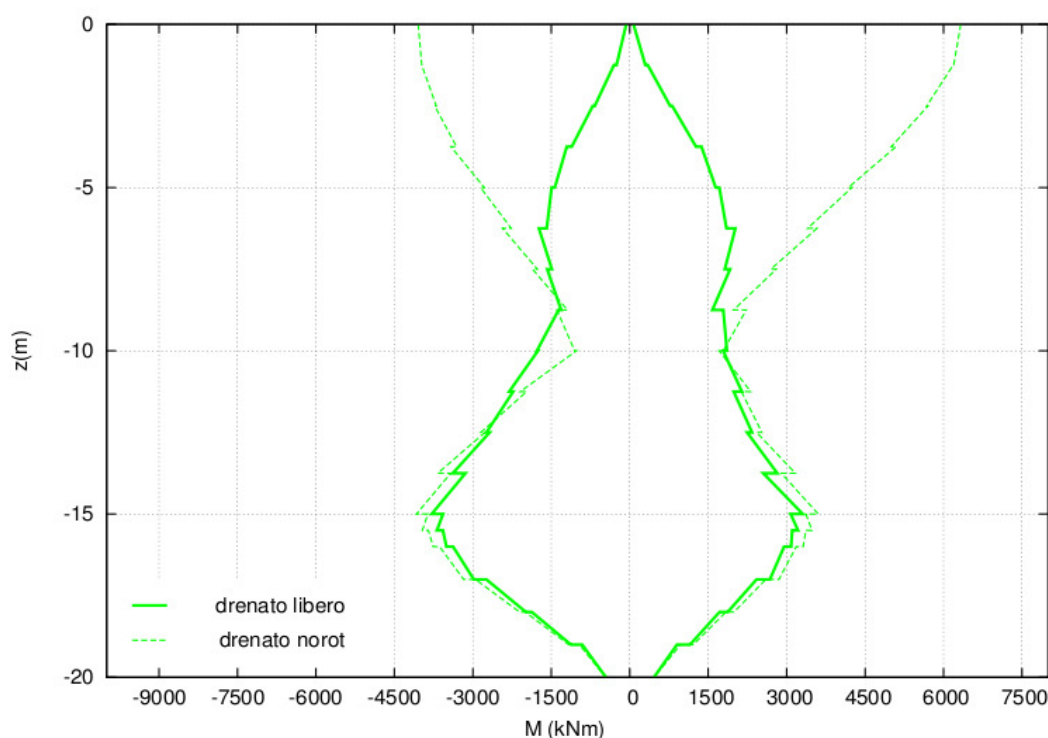


Figura 7.4.5: Involuppo dei momenti flettenti massimi indotti nel palo di diametro  $D=1.5\text{m}$  a seguito dell'evento sismico di Tolmezzo. Analisi drenata. Strato superiore con  $Dr=85\%$ .

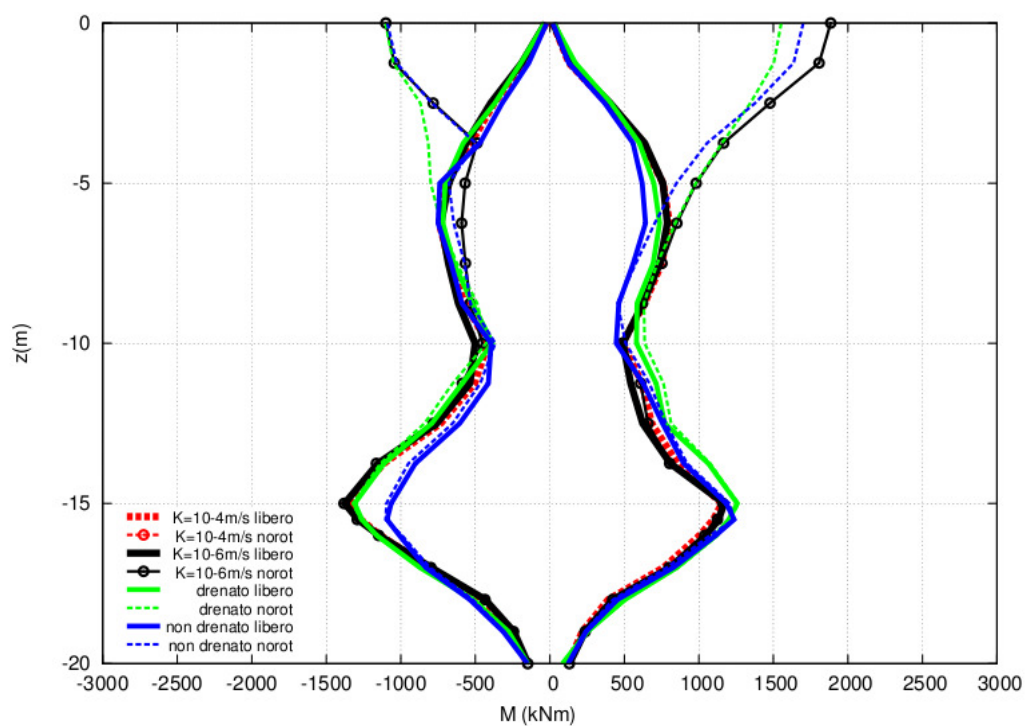


Figura 7.4.6: Evento sismico di Tolmezzo.  $Dr=85\%$ . Involuppo dei momenti flettenti massimi.

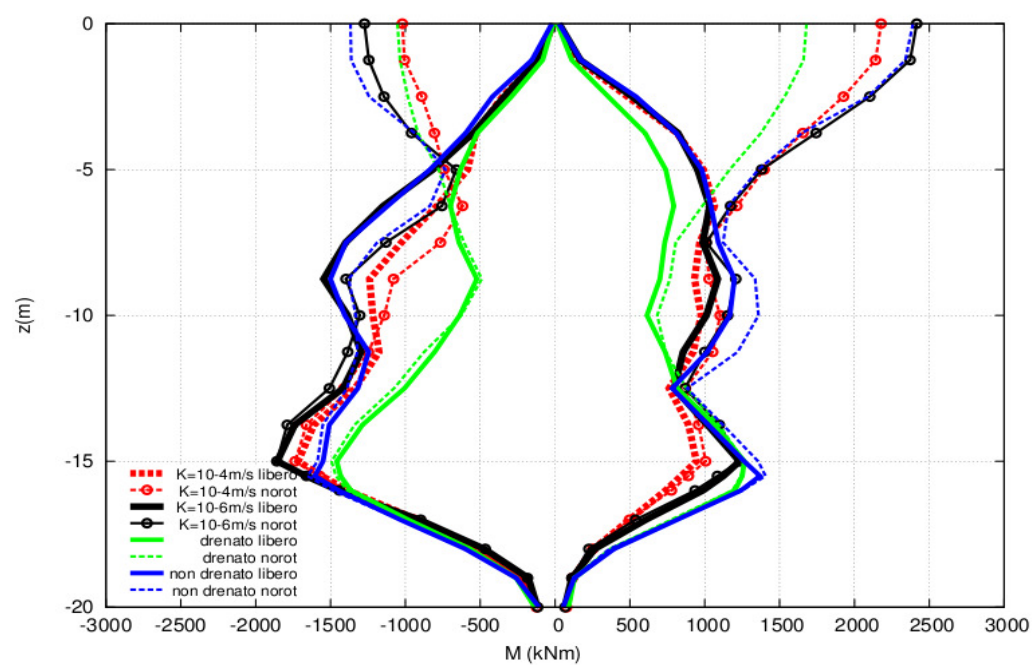


Figura 7.4.7: Evento sismico di Tolmezzo.  $Dr=55\%$ . Involuppo dei momenti flettenti massimi.



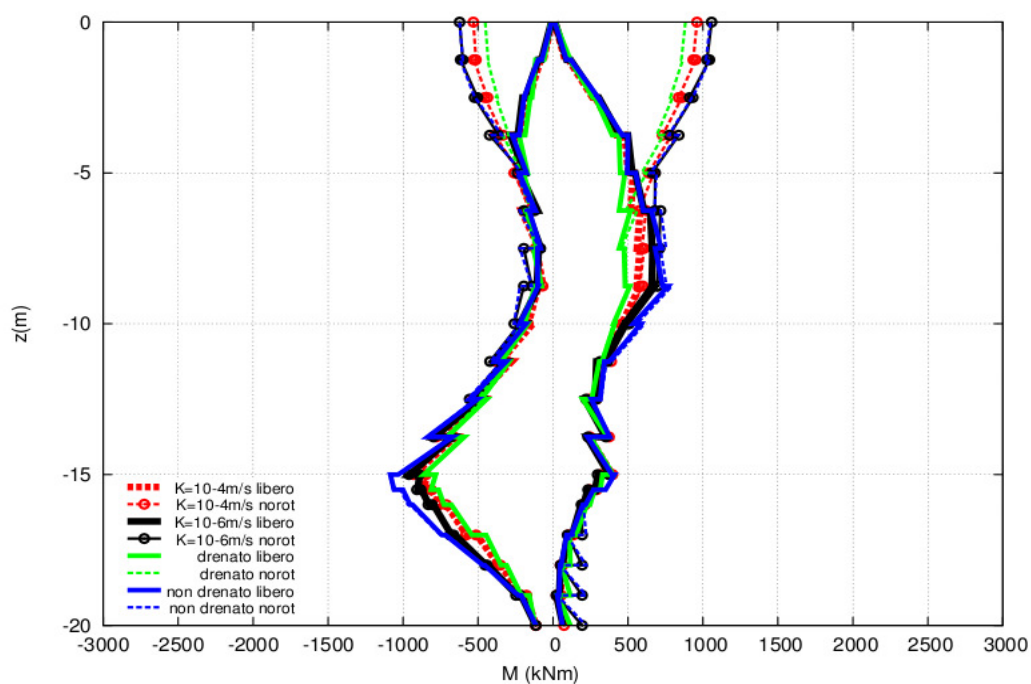


Figura 7.4.8: Evento sismico di Sturno.  $Dr=85\%$ . Involuppo dei momenti flettenti massimi.

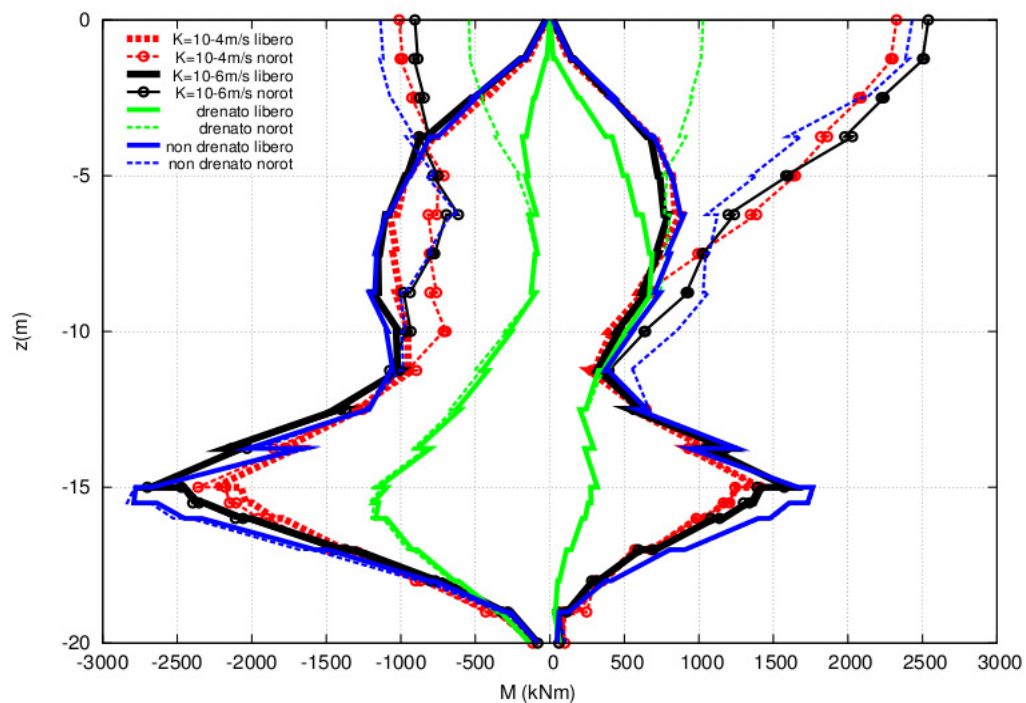


Figura 7.4.9: Evento sismico di Sturno.  $Dr=55\%$ . Involuppo dei momenti flettenti massimi.



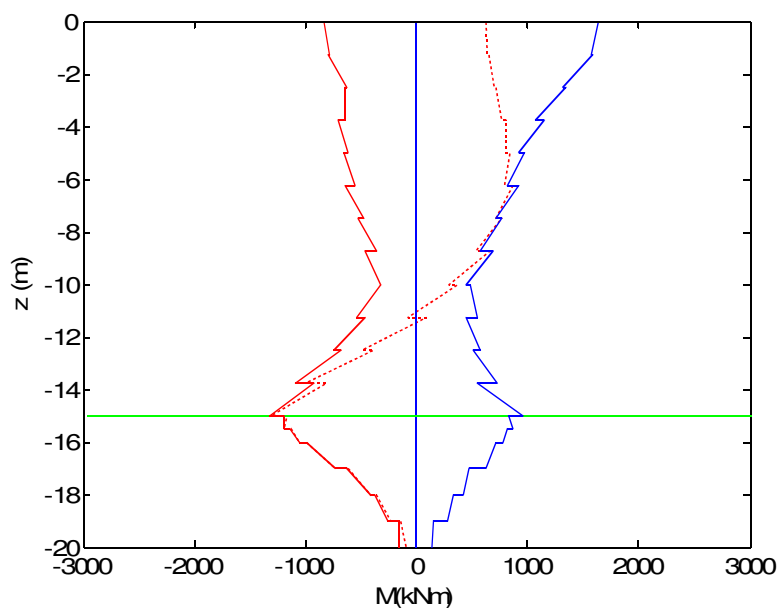


Figura 7.4.10: Istante  $t=4,21s$ ;  
Momenti flettenti indotti nel palo (linea tratteggiata);  
Involuppo momenti massimi (linea continua).  
Accelerogramma Tolmezzo - Dr85% -  $K=10^{-4}m/s$

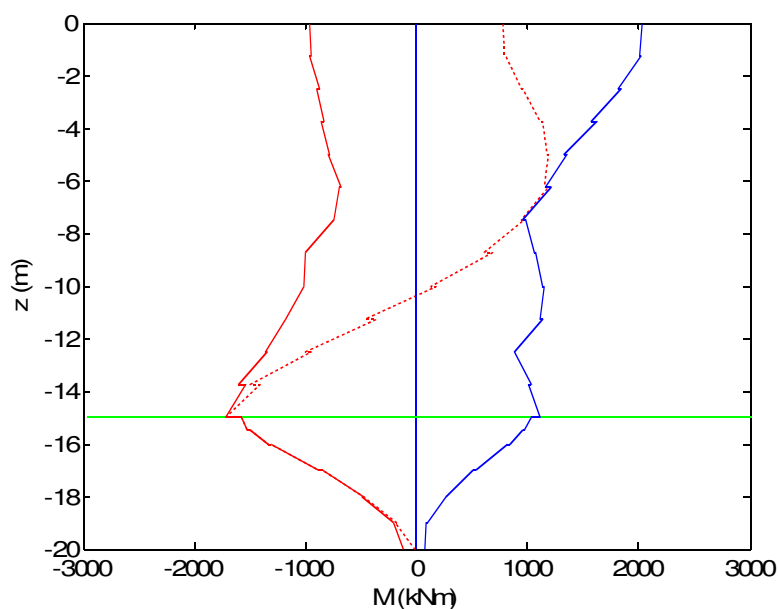


Figura 7.4.11: Istante  $t=4,25s$ ;  
Momenti flettenti indotti nel palo (linea tratteggiata);  
Involuppo momenti massimi (linea continua).  
Accelerogramma Tolmezzo - Dr55% -  $K=10^{-4}m/s$

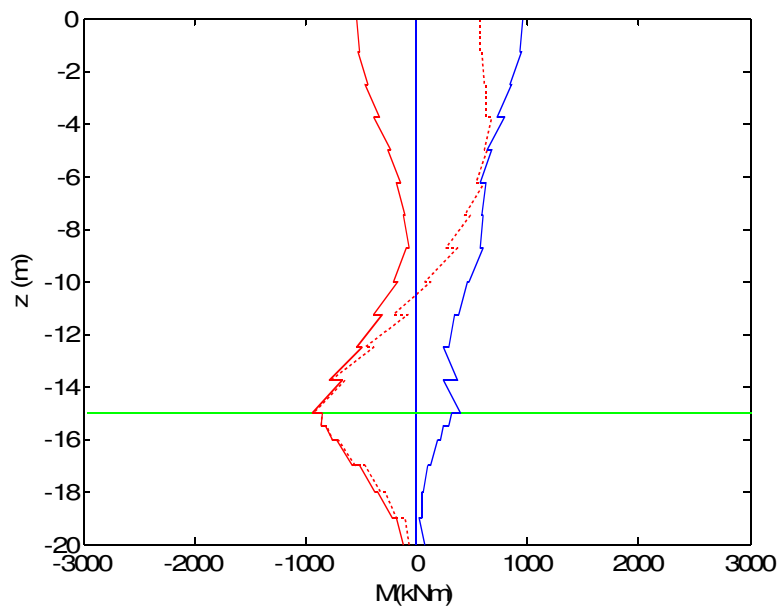


Figura 7.4.12: Istante  $t=4,7s$ ;  
Momenti flettenti indotti nel palo (linea tratteggiata);  
Involuppo momenti massimi (linea continua).  
Accelerogramma Sturno - Dr85% -  $K=10^{-4}m/s$

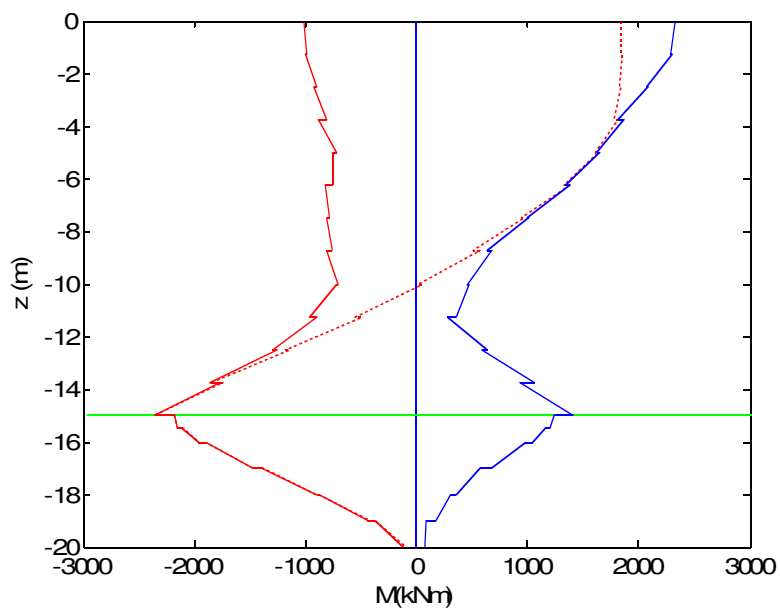


Figura 7.4.13: Istante  $t=10,53s$ ;  
Momenti flettenti indotti nel palo (linea tratteggiata);  
Involuppo momenti massimi (linea continua).  
Accelerogramma Sturno - Dr55% -  $K=10^{-4}m/s$

#### **7.4.1.2     Effetto della lunghezza del palo**

Nelle analisi con pali di diametro 0.6m e 1m, la testa e il contatto stratigrafico sono posizionati ad una distanza superiore alla lunghezza attiva del palo. Ciò significa che una qualsiasi modifica delle condizioni di vincolo in testa non viene percepita dalla sezione che si trova in corrispondenza del contatto, e viceversa. Per questa ragione, la variazione della lunghezza complessiva del palo ha un effetto significativo solo sull'entità dei momenti massimi in prossimità del contatto stratigrafico e non su tutta la lunghezza del palo. Essa infatti variando, modifica la lunghezza di palo immersa nello strato rigido inferiore ( $L_p$ ). Se tale lunghezza è elevata, la base del palo risulta sufficientemente confinata dallo strato rigido e le sollecitazioni sono quelle corrispondenti ad un palo infinitamente lungo. Se invece essa viene ridotta le sollecitazioni si riducono.

In Figura 7.4.14, 7.4.15 e 7.4.16 sono stati rappresentati i momenti flettenti massimi corrispondenti alle tre differenti lunghezze del palo di diametro 0.6m, 1m e 1.5m per il caso di  $D_r=85\%$  e permeabilità  $K=10^{-4}$ m/s. E' possibile osservare che l'interazione tra la testa e l'interfaccia risulta trascurabile poiché l'involuppo dei momenti massimi è perfettamente sovrapposto fino alla profondità di circa 10 metri. Al di sotto di questa soglia, le sollecitazioni massime nella sezione posta al contatto stratigrafico dipendono dalla lunghezza immorsata nello strato inferiore. Prendendo a riferimento il palo di diametro 0.6m, si nota che una lunghezza di 3m, corrispondente a cinque diametri (5D), è sufficiente per considerare il palo infinitamente lungo.

Per quel che riguarda invece il palo di diametro 1m, la lunghezza di 5D corrisponde alla massima lunghezza del palo utilizzata nelle analisi e quindi non può essere stabilito con certezza se essa sia sufficiente per garantire un efficace confinamento. Per questa ragione è stata condotta un'analisi con un palo di ugual diametro, cioè 1m, ma con lunghezza di infissione pari a 10m e si è potuto constatare anche in questo caso che una lunghezza di 5D è sufficiente per considerare il palo infinitamente lungo.

Il palo di diametro 1.5m infine, ha lunghezze ( $L_p$ ) sempre minori di 5D, poiché al massimo 5m corrispondono a 3.33D, perciò le sollecitazioni sono sempre influenzate dalla vicinanza della base (oltre ad essere condizionate in minima parte anche dall'interazione con la testa).

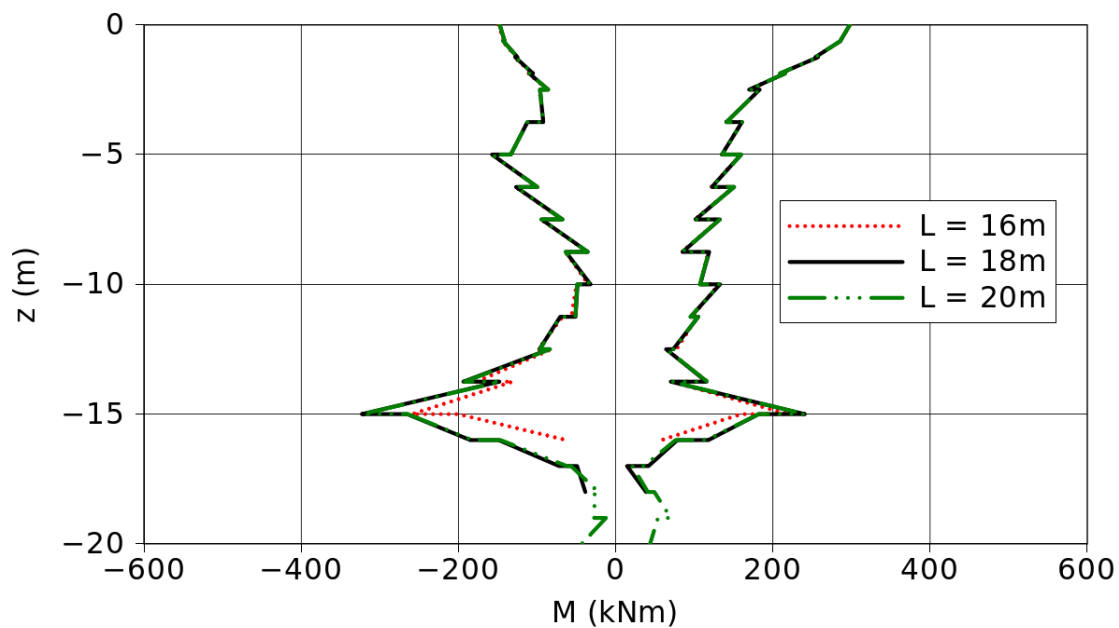


Figura 7.4.14: Evento sismico di Tolmezzo.  $D_r=55\%$ . Involuppo dei momenti flettenti massimi. Palo diametro  $D = 0.6\text{m}$ . Analisi di consolidazione con permeabilità  $K = 10^{-4}\text{m/s}$ .

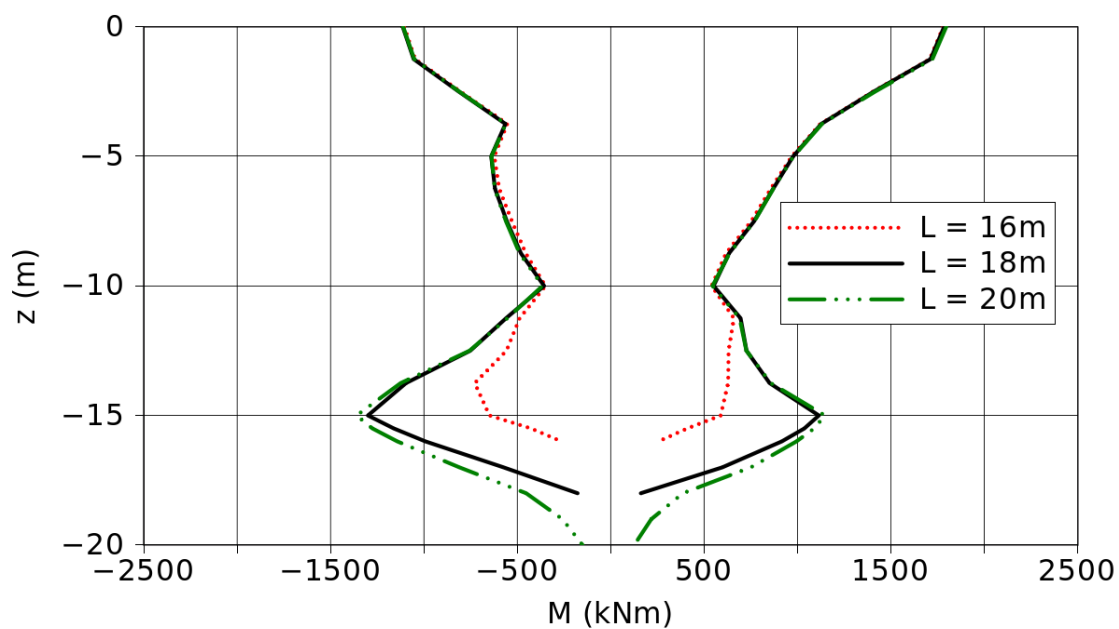


Figura 7.4.15: Evento sismico di Tolmezzo.  $D_r=55\%$ . Involuppo dei momenti flettenti massimi. Palo diametro  $D = 1\text{m}$ . Analisi di consolidazione con permeabilità  $K = 10^{-4}\text{m/s}$ .

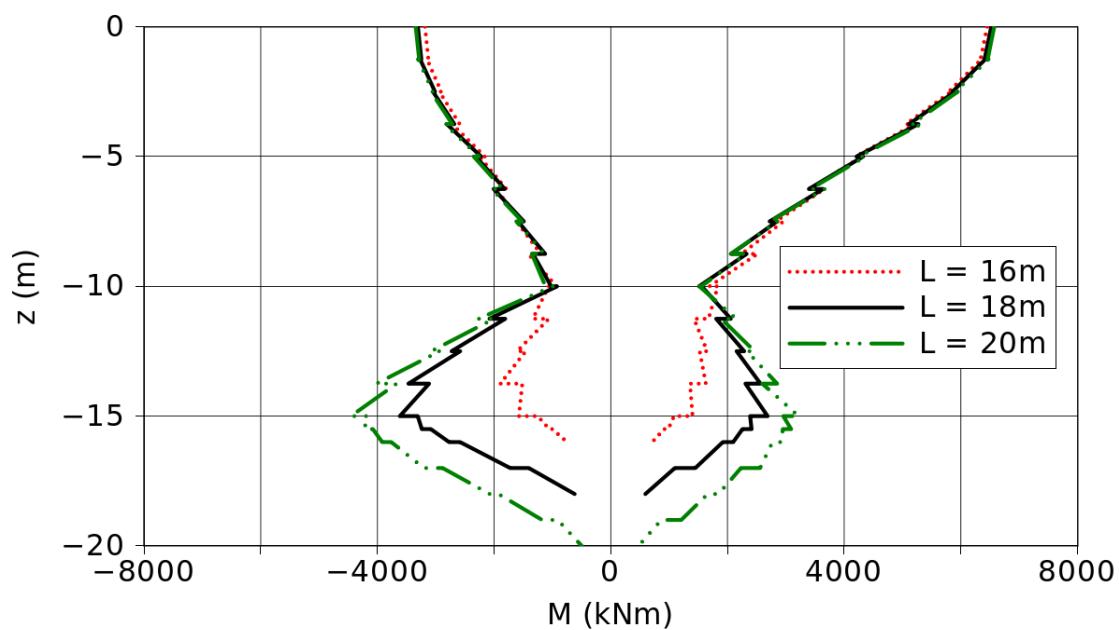


Figura 7.4.16: Evento sismico di Tolmezzo.  $D_r=55\%$ . Involuppo dei momenti flettenti massimi. Palo diametro  $D = 1.5\text{m}$ . Analisi di consolidazione con permeabilità  $K = 10^{-4}\text{m/s}$ .

### 7.4.1.3 Effetto del diametro del palo

Aumentare le dimensioni della sezione del palo significa aumentare la sua rigidezza flessionale. In questo modo durante l'evento sismico, esso si oppone con maggiore efficacia al moto di *free-field* e subisce sollecitazioni più alte per tutta la sua lunghezza.

Il contributo offerto dal diametro del palo è stato messo in evidenza inizialmente focalizzando l'attenzione sulle sovrappressioni interstiziali generate per effetto dell'interazione e successivamente, sono stati messi in luce alcuni aspetti legati alle sollecitazioni, sia all'interfaccia sia in testa.

#### 7.4.1.3.1 Incrementi di pressione interstiziale

L'interazione palo-terreno, proprio per la loro differente rigidezza, modifica le pressioni interstiziali nelle vicinanze del palo rispetto alla condizione di *free-field*. Nelle figure 7.4.18, 7.4.19 e 7.4.20 sono stati rappresentati gli incrementi delle pressioni interstiziali nell'istante in cui il palo raggiunge il massimo momento flettente nella sezione posta al contatto stratigrafico (Figura 7.4.17).

Se il palo ha un diametro di 1.5m (figura 7.4.20), è ben evidente che l'interazione induce, nello strato superiore e a contatto con il palo, incrementi di pressioni interstiziali ( $\Delta u$ ) significativamente diversi da quelli che si generano a grande distanza, condizione che rappresenta proprio il *free-field*.

Riducendo il diametro del palo, tuttavia, tali differenze sono progressivamente sempre più contenute poiché si attenua la rigidezza relativa palo-terreno. Infatti se si prendono in considerazione i risultati ottenuti dalle analisi con il palo di diametro 0.6m (Figura 7.4.18), si nota che gli incrementi di pressione interstiziale sono pressoché indipendenti dalla distanza dal palo; condizione che implicitamente evidenzia una modesta interazione terreno-struttura.

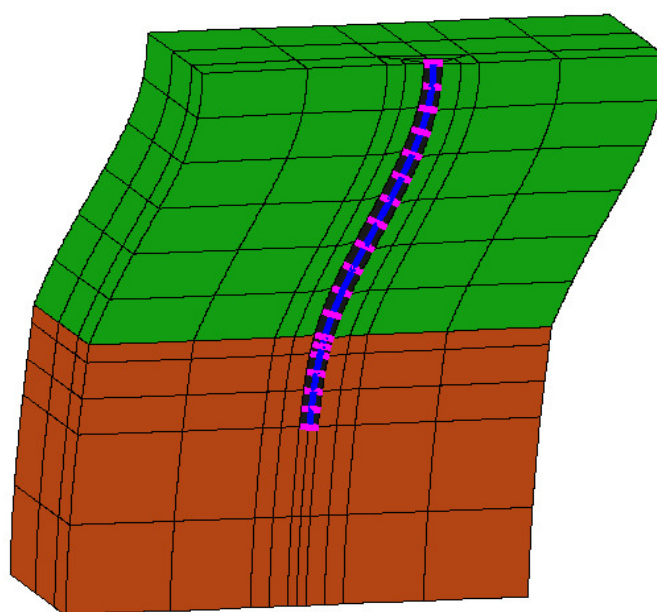


Figura 7.4.17: Configurazione deformata all'istante in cui si verifica il massimo momento flettente nella sezione in corrispondenza del contatto stratigrafico.  $D_r=85\%$ .

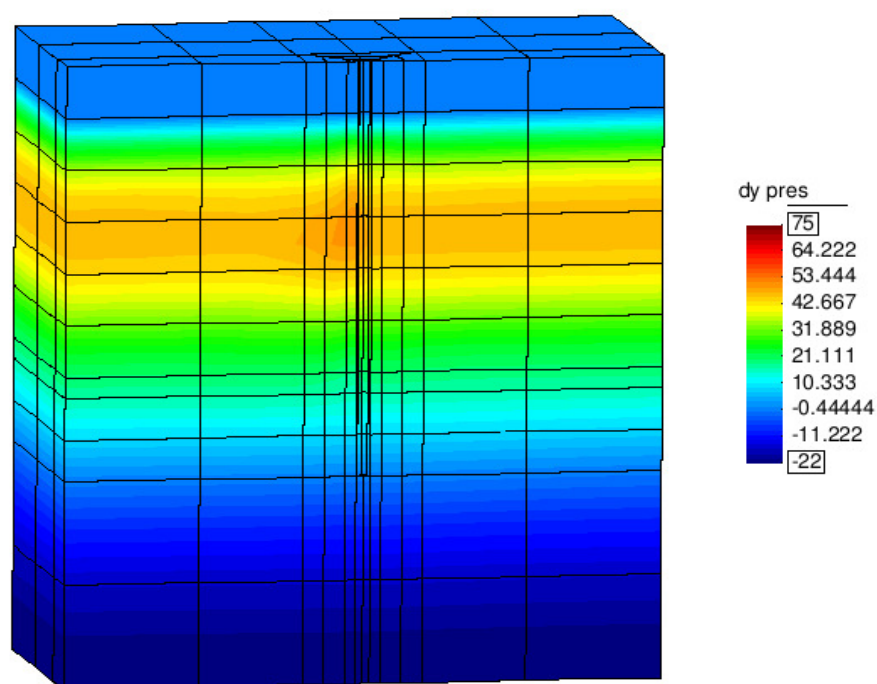


Figura 7.4.18:  $\Delta u$  all'istante in cui si verifica il massimo momento all'interfaccia.  
 $D=0.6\text{m}$ .  $D_r = 85\%$ .  $K = 10^{-4}\text{m/s}$ .

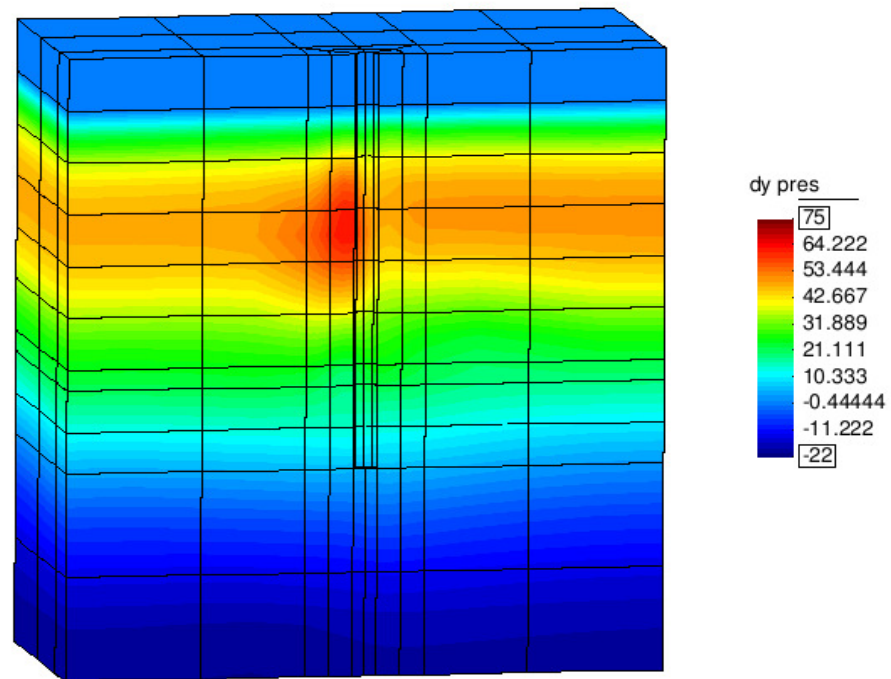


Figura 7.4.19:  $\Delta u$  all'istante in cui si verifica il massimo momento all'interfaccia.  
 $D=1\text{m}$ .  $D_r = 85\%$ .  $K = 10^{-4}\text{m/s}$ .

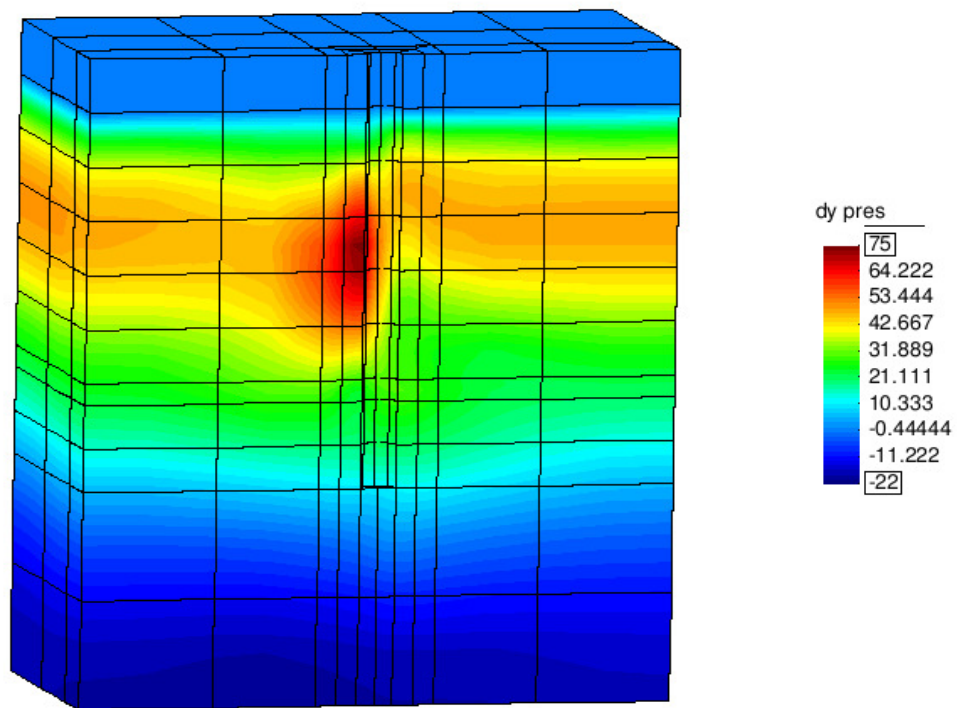


Figura 7.4.20:  $\Delta u$  all'istante in cui si verifica il massimo momento all'interfaccia.  
 $D=1.5\text{m}$ .  $D_r = 85\%$ .  $K = 10^{-4}\text{m/s}$ .



### 7.4.1.3.2 Sollecitazioni al contatto stratigrafico

Dalla letteratura è noto che in un mezzo stratificato elastico lineare, la deformazione massima ( $\epsilon_p$ ) in corrispondenza del contatto stratigrafico diminuisce all'aumentare del rapporto  $D/E_1$  (Mylonakis (2001), Di Laora et al. (2011)). A parità di rigidezza equivalente dello strato superiore, la deformazione massima quindi si riduce all'aumentare del diametro del palo. In realtà, dall'analisi dei risultati di questo studio parametrico è emerso che questa condizione non è sempre verificata. Per esempio nel caso di analisi di consolidazione con  $Dr=55\%$  e  $K=10^{-4}\text{m/s}$ , la deformazione massima ( $\epsilon_p$ ) ottenuta per l'evento sismico di Sturno diminuisce all'aumentare del diametro del palo, mentre per l'evento sismico di Tolmezzo l'andamento è esattamente opposto.

Risulta opportuno ricordare che, per un adeguato confronto, si sarebbe dovuto utilizzare pali di lunghezza  $L_p$  superiore a  $5D$ ; tuttavia questo aspetto non influenza le considerazioni fin qui svolte.

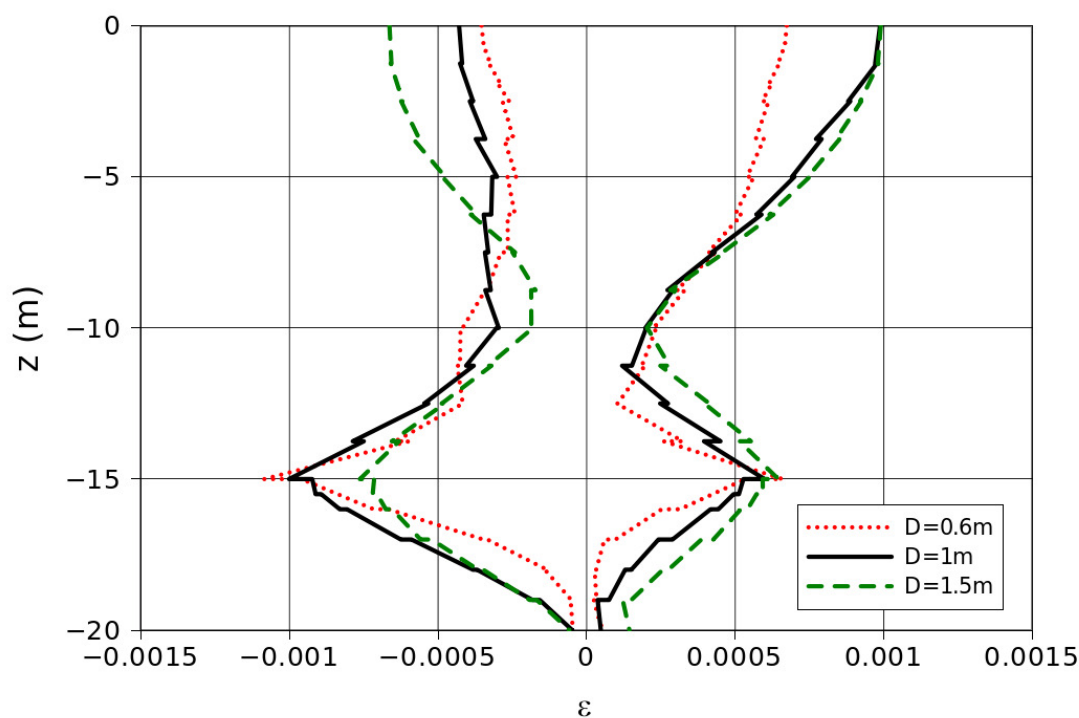


Figura 7.4.21: Involuppo delle deformazioni massime di trazione nel palo.  
Evento sismico di Sturno.  $Dr=55\%$ .  $K=10^{-4}\text{m/s}$ .

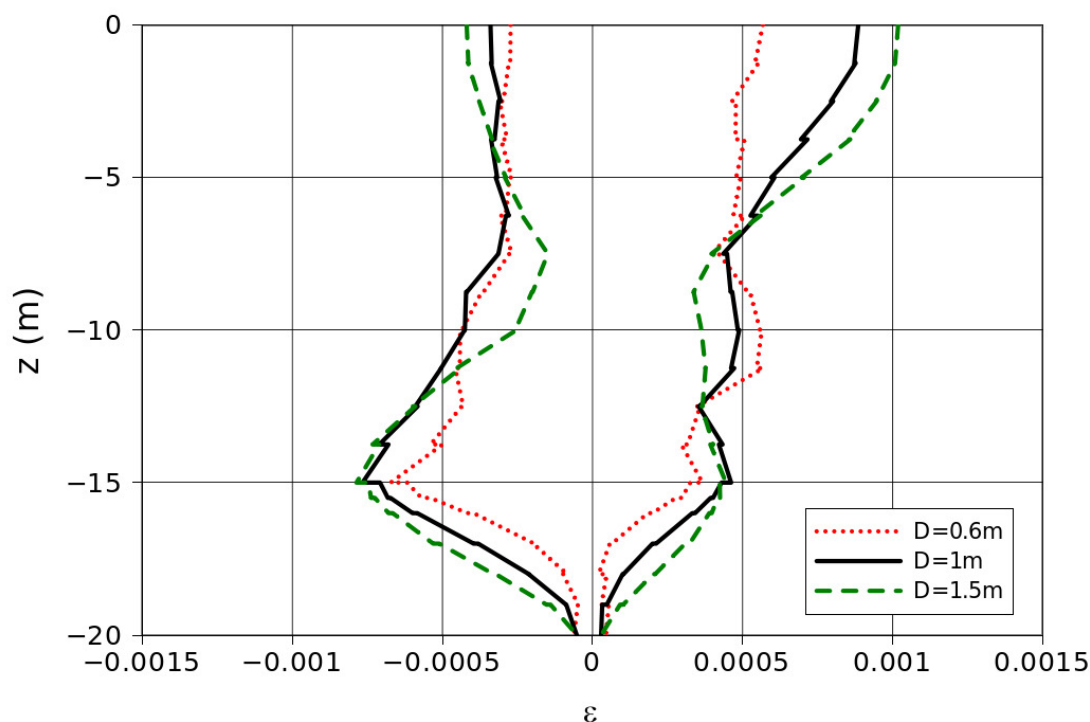


Figura 7.4.22: Involuppo delle deformazioni massime di trazione nel palo. Evento sismico di Tolmezzo.  $D_r=55\%$ .  $K=10^{-4}\text{m/s}$ .

### 7.4.1.3.3 Sollecitazioni in testa al palo

Studi in letteratura affermano che la curvatura del palo può essere considerata pressoché uguale a quella del terreno nelle seguenti condizioni: palo sufficientemente snello, terreno elastico lineare con rigidezza costante con la profondità e spessore dello strato superiore maggiore della lunghezza attiva del palo. Sotto queste ipotesi la curvatura del palo risulta indipendente dal diametro.

Sebbene nelle analisi numeriche svolte in questa tesi, lo spessore dello strato superiore sia maggiore della lunghezza attiva del palo, la rigidezza del terreno non è costante con la profondità: in particolare quella a piccole deformazioni varia con legge parabolica.

*Di Laora e Mandolini(2011)* hanno messo in luce l'importanza del grado di disomogeneità della rigidezza del terreno nei confronti della curvatura del palo. Essa, infatti, dipende oltre che dall'accelerazione in superficie e dalla velocità delle onde di taglio, anche dal grado di disomogeneità e dal rapporto tra la lunghezza caratteristica e diametro. All'aumentare di quest'ultimo, infatti, la lunghezza caratteristica aumenta e la curvatura del palo diminuisce.

Nelle figure sottostanti, per ciascun evento sismico, sono state ricavate per l'analisi accoppiata ( $D_r=55$ ,  $85\%$  e  $K = 10^{-4}\text{m/s}$ ) le curvature massime in testa al palo e sono state rappresentate in funzione del diametro. I risultati mostrano che i valori tendono a diminuire all'aumentare del diametro, in accordo con le osservazioni di *Di Laora e Mandolini (2011)*.

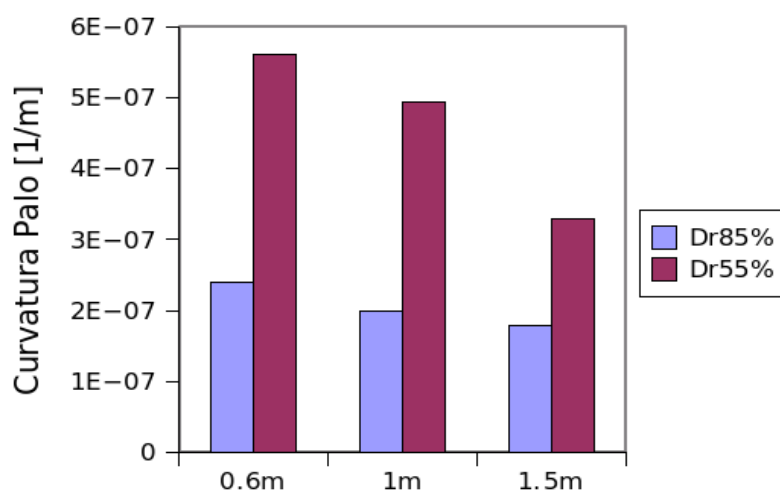


Figura 7.4.23: Curvatura massima del palo nella sezione in testa.  
Evento sismico di Sturno. Analisi di consolidazione con  $K=10^{-4}\text{m/s}$ .

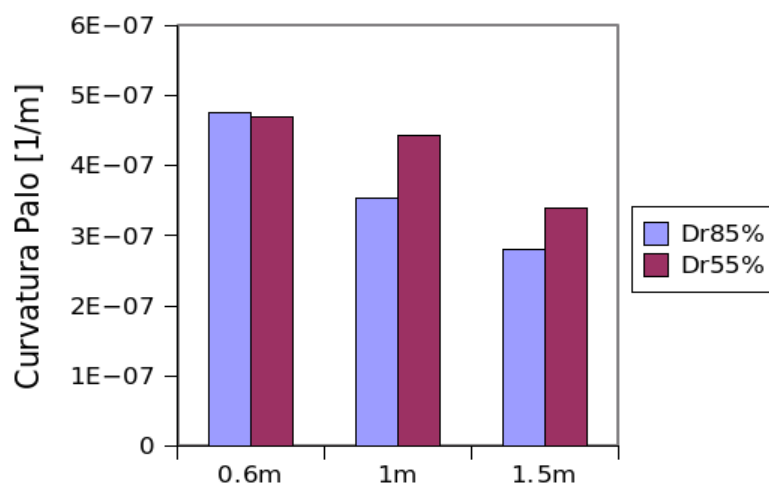


Figura 7.4.24: Curvatura massima del palo nella sezione in testa.  
Evento sismico di Tolmezzo. Analisi di consolidazione con  $K=10^{-4}\text{m/s}$ .

### 7.4.2 Modifica del moto in testa al palo

La presenza di un palo immerso nel terreno induce anche una modifica del moto sismico in testa per effetto dell'interazione cinematica. Dalle diverse analisi sono stati ricavati gli spettri di risposta in accelerazioni del segnale in testa al palo e sono stati confrontati con quelli ottenuti dalle analisi di campo libero. In Figura 7.4.25, 7.4.26, 7.4.27 e 7.4.28 sono stati rappresentati i risultati ottenuti dall'analisi drenata e da quella di consolidazione con permeabilità pari a  $10^{-4}$  m/s. E' evidente che se il materiale si trova in condizioni drenate gli spettri di risposta sono perfettamente sovrapposti; se invece si considerano le analisi di consolidazione nelle quali si generano  $\Delta u$ , gli spettri mostrano alcune differenze in corrispondenza di periodi bassi.

In generale l'accelerazione in testa al palo non è sempre inferiore a quella di campo libero; infatti a seguito dell'evento sismico di Tolmezzo, l'accelerazione in testa al palo di diametro 0.6m risulta leggermente più elevata (Figura 7.4.25). Tuttavia, una caratteristica comune a tutte le analisi è che l'accelerazione massima diminuisce all'aumentare del diametro del palo, in modo più marcato in presenza di terreno poco addensato.

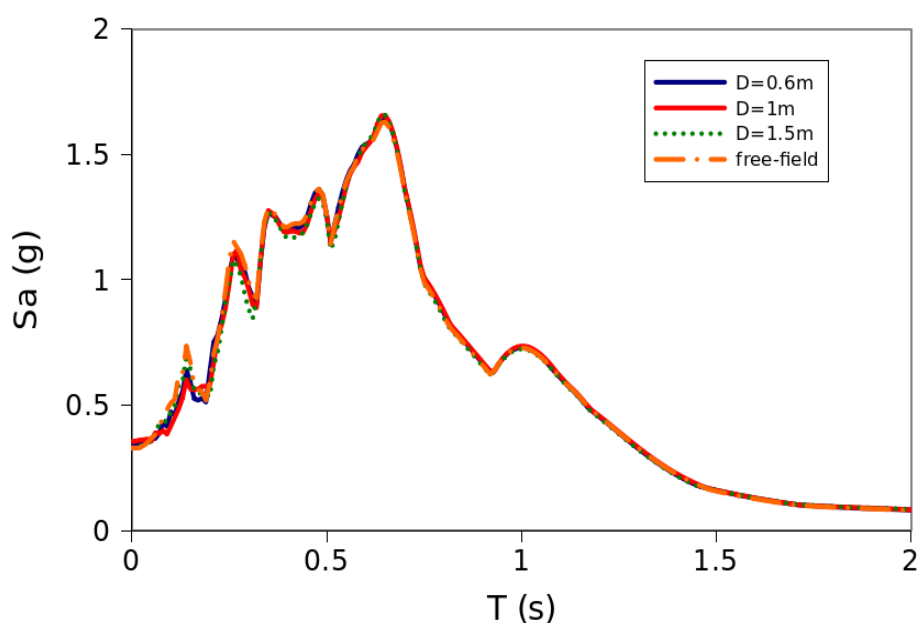


Figura 7.4.25: Spettro di risposta in accelerazioni del segnale ottenuto in testa al palo. Confronto con quello in superficie nelle condizioni di campo libero.  
 $D_r = 85\%$ . Tolmezzo. Analisi Drenata.

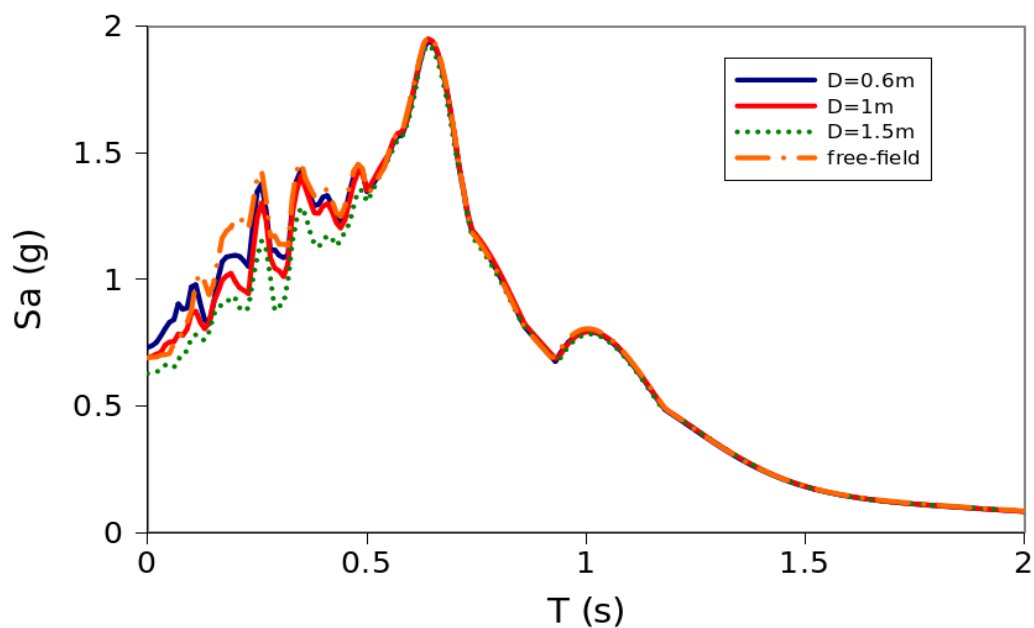


Figura 7.4.26: Spettro di risposta in accelerazioni del segnale ottenuto in testa al palo.  
Confronto con quello in superficie nelle condizioni di campo libero.  
 $D_r = 85\%$ . Tolmezzo. Analisi di consolidazione con  $K=10^{-4}$  m/s.

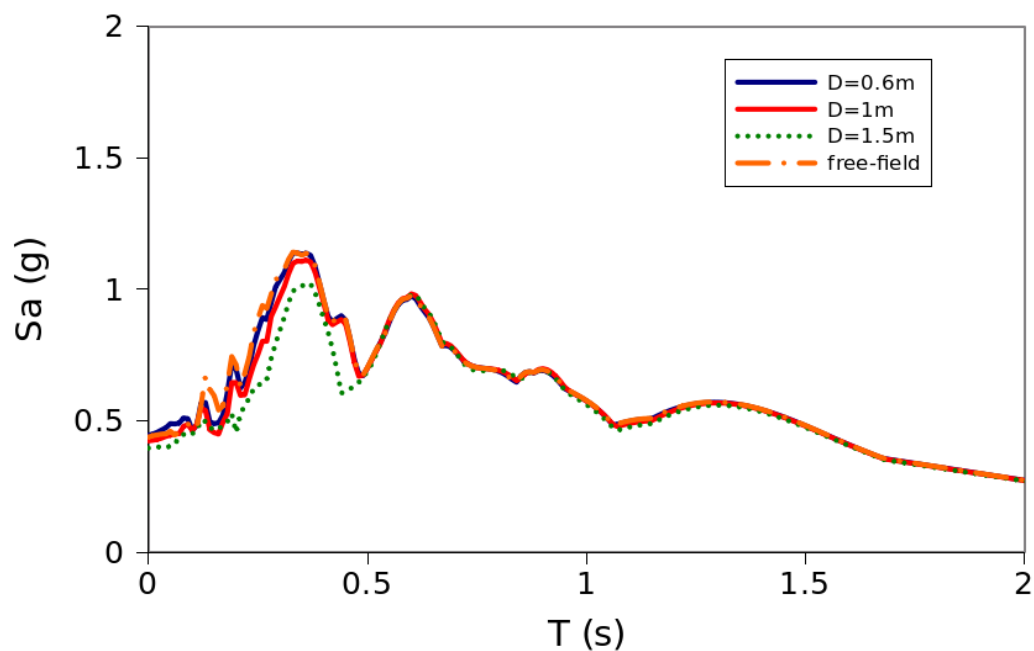


Figura 7.4.27: Spettro di risposta in accelerazioni del segnale ottenuto in testa al palo.  
Confronto con quello in superficie nelle condizioni di campo libero.  
 $D_r = 85\%$ . Sturmo. Analisi di consolidazione con  $K=10^{-4}$  m/s.

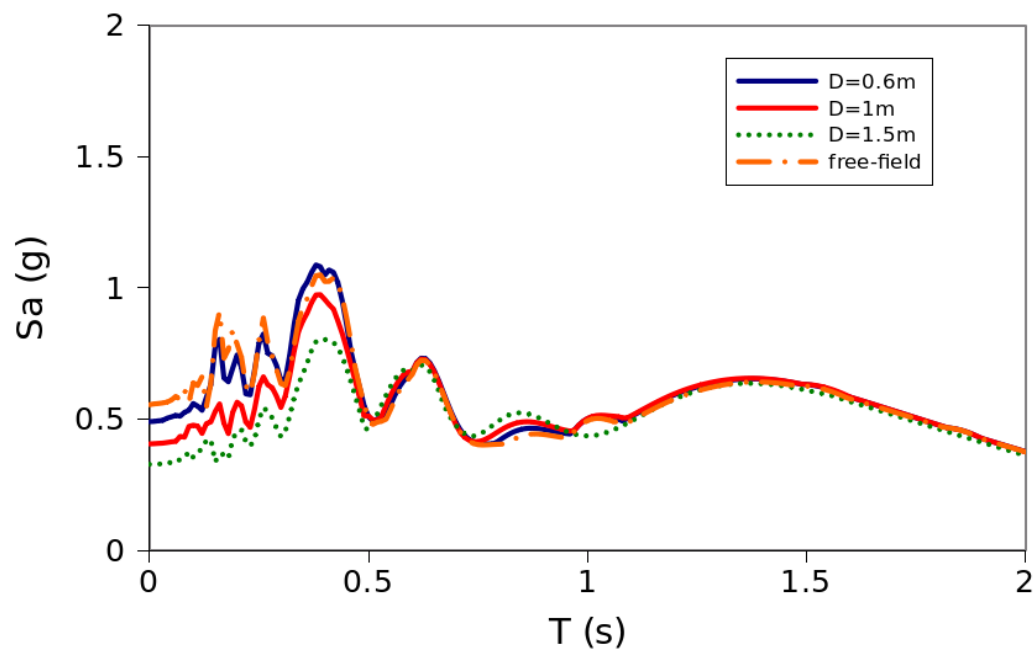


Figura 7.4.28: Spettro di risposta in accelerazioni del segnale ottenuto in testa al palo.  
Confronto con quello in superficie nelle condizioni di campo libero.  
 $D_r = 55\%$ . Sturno. Analisi di consolidazione con  $K=10^{-4}m/s$ .

## 7.5 ACCURATEZZA DELLE ANALISI AL FINITO

### 7.5.1 Influenza della dimensione degli elementi

Come affermato nel Capitolo 6, i risultati delle simulazioni numeriche con la tecnica degli elementi finiti sono sempre dipendenti dalla dimensione e dal tipo di elementi utilizzati nel reticolo. E' possibile affermare che la soluzione è prossima a quella “esatta” se essa risulta stabile al diminuire della dimensione degli elementi, ad eccezione di casi particolari in cui è presente il fenomeno della “localizzazione”. Quindi è sempre utile ripetere le analisi utilizzando elementi progressivamente più piccoli, con l'obiettivo di confrontare i risultati e stimarne l'accuratezza.

Per questa ragione sono state condotti alcuni approfondimenti, sia per quanto riguarda la risposta sismica locale della colonna per le condizioni di *free-field*, sia per l'analisi di interazione palo-terreno.

Per la colonna sono stati scelti elementi quadratici di dimensione costante, pari a 2.5 m, 0.625 m e 0.3125m. La storia temporale delle velocità e dei cedimenti in superficie (Figura 7.5.1, 7.5.2, 7.5.3 e 7.5.4) mostrano che anche elementi grossolani ( $dz=1.25m$ ) possono fornire risultati sufficientemente accurati, ad eccezione dell'analisi di consolidazione con permeabilità pari a  $10^{-6}m/s$ . Per comprenderne le ragioni è necessario esaminare i grafici in Figura 7.5.5 e Figura 7.5.6, che mostrano le storie temporali degli incrementi di pressione interstiziale ( $\Delta u$ ) a diverse profondità. Se la permeabilità del terreno è elevata ed omogenea, i gradienti idraulici che si sviluppano durante l'evento sismico sono modesti e quindi anche elementi di grosse dimensioni possono essere sufficientemente accurati per descrivere adeguatamente il processo di consolidazione. Se invece lo strato superiore è meno permeabile di quello inferiore, i gradienti idraulici che si generano in prossimità sia del contatto stratigrafico sia della superficie piezometrica, sono molto elevati e proprio in queste zone sono necessari elementi di dimensioni ridotte.

Anche a seguito delle considerazioni svolte fin qui riguardo la risposta di *free-field*, sono state ripetute le simulazioni di un caso di analisi di interazione (palo di lunghezza 20m e diametro 1m) utilizzando elementi di dimensioni ridotte vicino alla superficie laterale del palo e in corrispondenza del contatto stratigrafico (Fig 7.5.7). I risultati sono stati espressi sotto forma di errore relativo calcolato con la relazione:

$$ERR[\%] = \frac{M_{orig} - M_{fitt}}{M_{orig}}$$

dove  $M_{orig}$  rappresenta il momento massimo ottenuto con la discretizzazione originale e  $M_{fitt}$  rappresenta invece quello ottenuto con la discretizzazione infittita.

Il calcolo dell'errore relativo è stato condotto sia per la valutazione delle sollecitazioni alla testa sia per quelle all'interfaccia e i risultati sono stati riassunti nell'istogramma in fig 7.5.8. Dall'analisi dei risultati, è stato possibile affermare che le sollecitazioni ottenute nelle analisi parametriche possono essere ritenute sufficientemente accurate, anche se sarebbe necessario comunque utilizzare reticoli progressivamente sempre più fitti per ottenere conclusioni più rigorose ed affidabili.

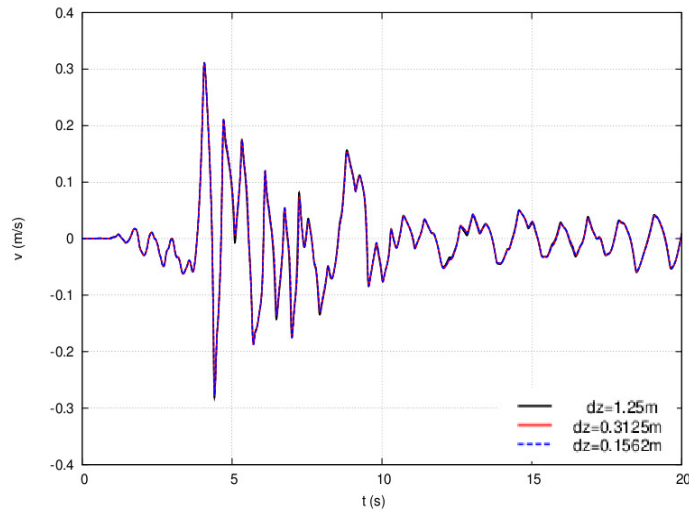


Figura 7.5.1: Storie temporali delle velocità in superficie ottenute dalle tre analisi con elementi progressivamente più piccoli. Analisi di consolidazione.  $Dr=55\%$ . Tolmezzo.  $K=10^{-4}$ m/s.

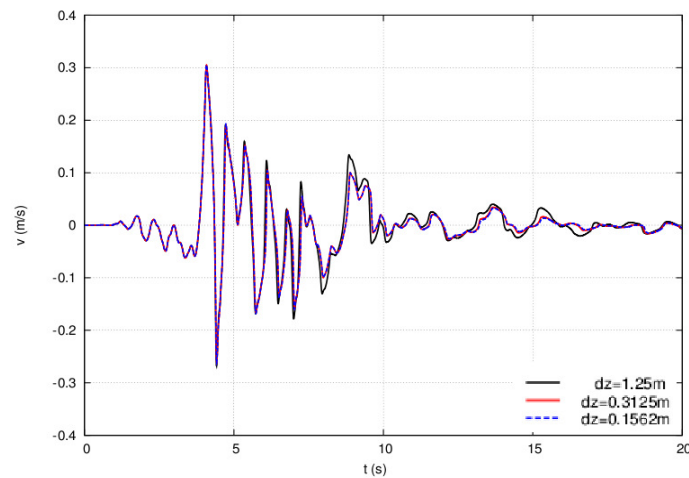


Figura 7.5.2: Storie temporali delle velocità in superficie ottenute dalle tre analisi con elementi progressivamente più piccoli. Analisi di consolidazione.  $Dr=55\%$ . Tolmezzo.  $K=10^{-6}$ m/s.



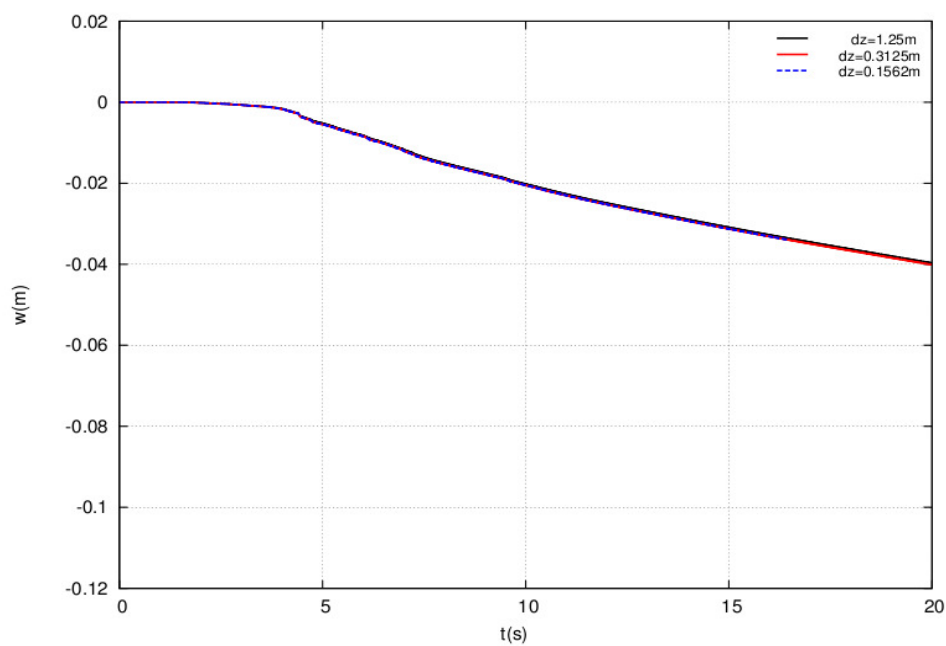


Figura 7.5.3: Storie temporali dei cedimenti della superficie ottenute dalle tre analisi con elementi sempre più piccoli. Analisi di consolidazione.  $Dr=55\%$ . Tolmezzo.  $K=10^{-4}$  m/s.

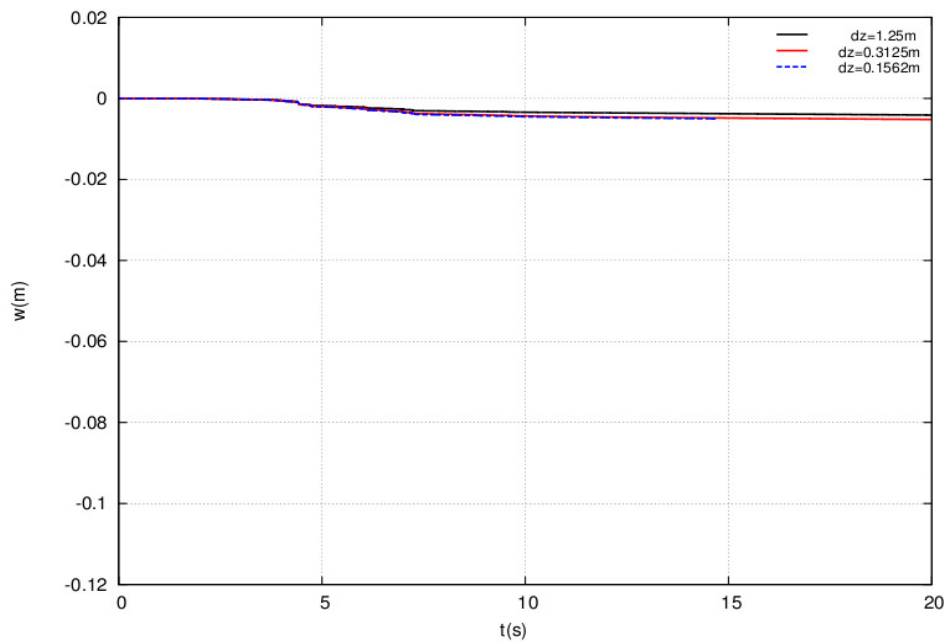


Figura 7.5.4: Storie temporali dei cedimenti della superficie ottenute dalle tre analisi con elementi sempre più piccoli. Analisi di consolidazione.  $Dr=55\%$ . Tolmezzo.  $K=10^{-6}$  m/s.

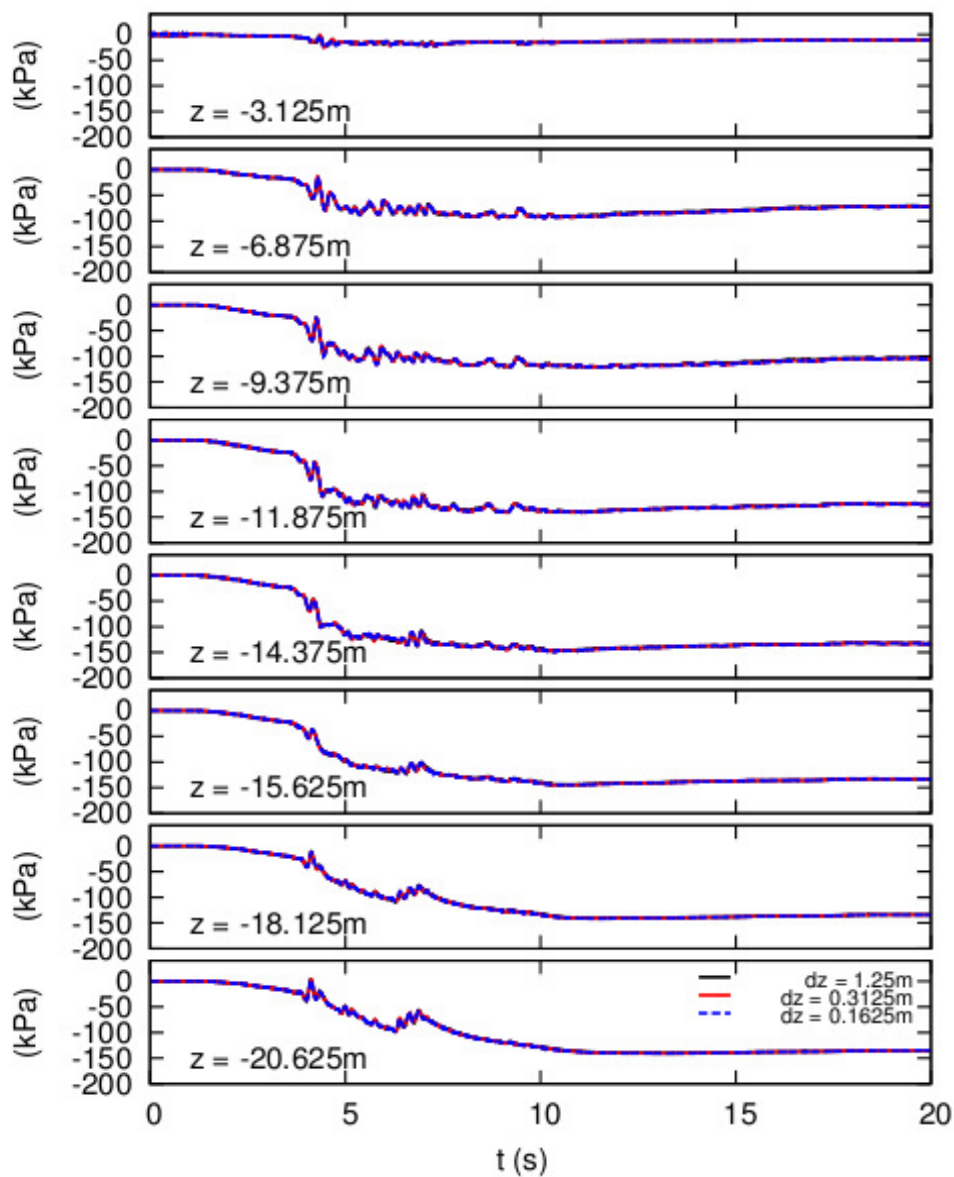


Figura 7.5.5: Andamento temporale delle sovrappressioni interstiziali  $\Delta u$  a diverse profondità, ricavate per le tre analisi con elementi sempre più piccoli. Evento sismico di Tolmezzo.  
Analisi di consolidazione con  $Dr = 55\%$  e  $K = 10^{-4}$  m/s.

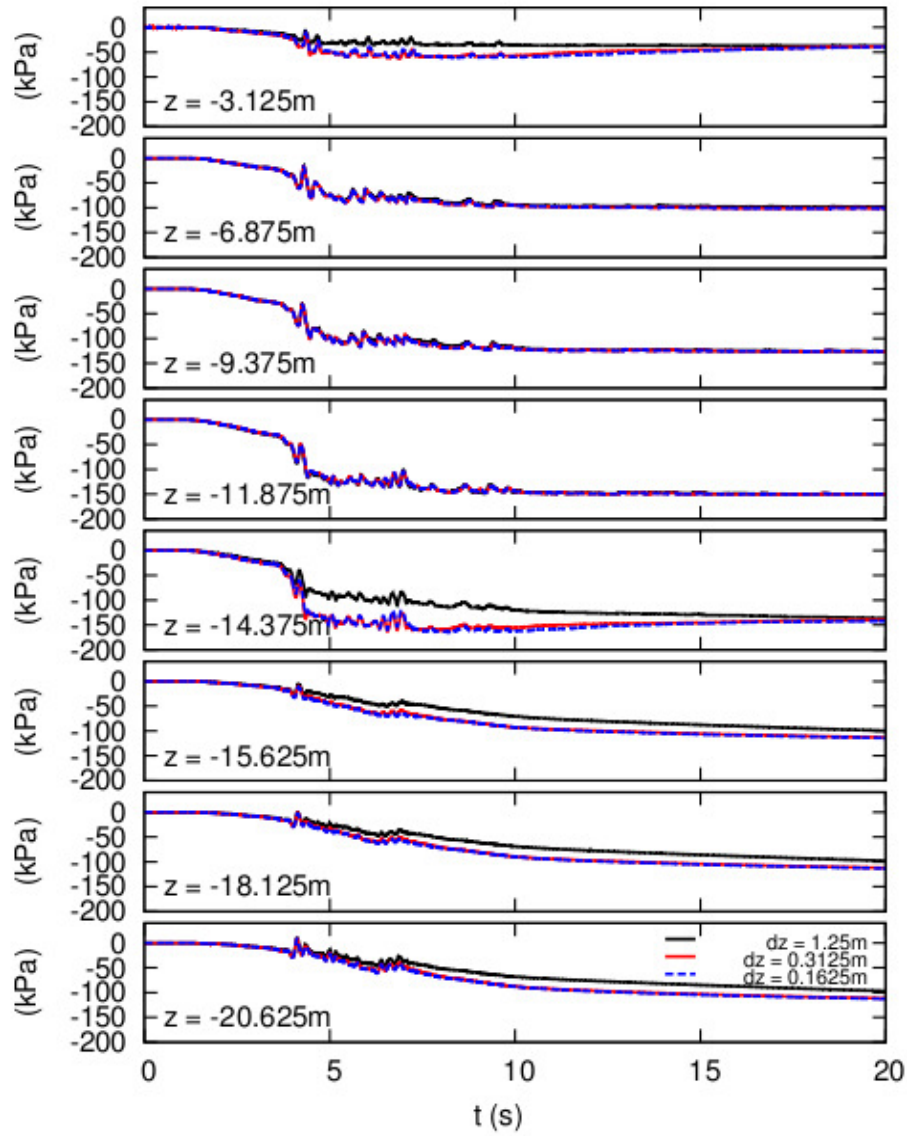


Figura 7.5.6: Andamento temporale delle sovrappressioni interstiziali  $\Delta u$  a diverse profondità, ricavate per le tre analisi con elementi sempre più piccoli. Evento sismico di Tolmezzo.

Analisi di consolidazione con  $Dr = 55\%$  e  $K = 10^{-6} \text{m/s}$ .

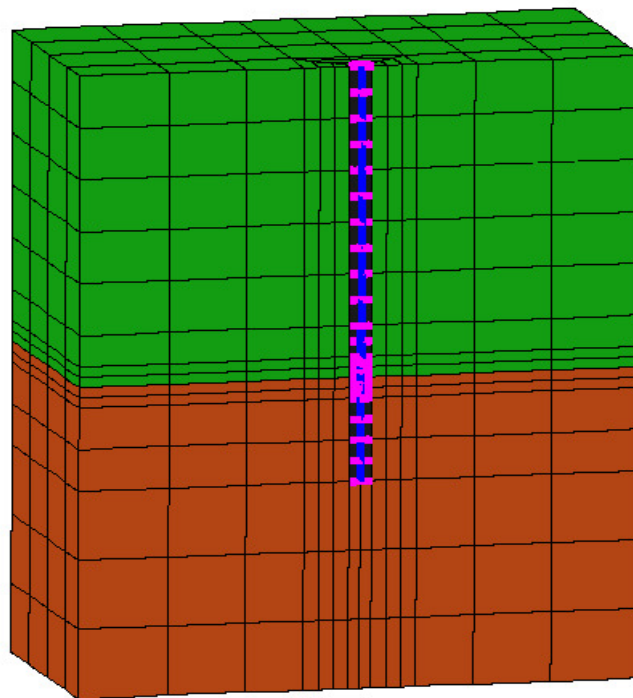


Figura 7.5.7: Reticolo con mesh più fitta in corrispondenza del contatto stratigrafico.

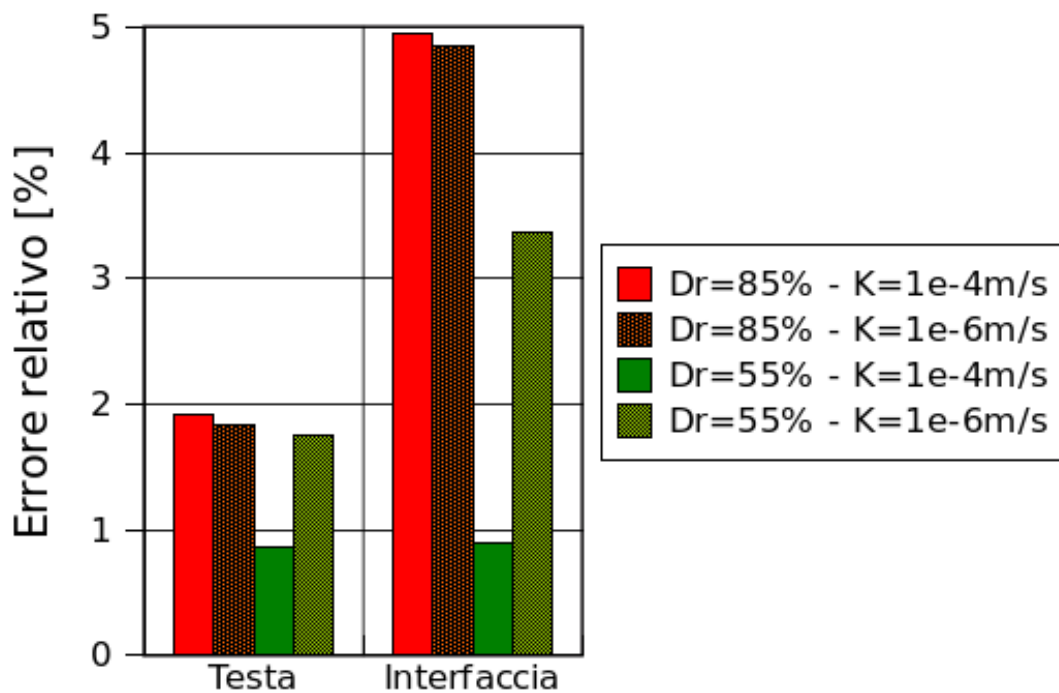


Figura 7.5.8: Errore relativo per i momenti calcolati in corrispondenza della testa e del contatto stratigrafico rispetto a quelli ricavati da mesh meno accurata.

## 7.5.2 Confronto tra analisi al finito: FEI e TOCHNOG

Per verificare la correttezza dell'implementazione del modello DM è stato opportuno confrontare i risultati di analisi di uno stesso problema, ottenute da simulazioni in FEI e in TOCHNOG. Inizialmente è stato deciso di studiare la risposta sismica locale in condizioni di campo libero e successivamente l'attenzione è stata rivolta al problema di interazione terreno-struttura.

### 7.5.2.1 Risposta sismica locale

Lo studio ha preso in esame la risposta sismica locale di una colonna di terreno. Inizialmente la presenza dell'acqua è stata trascurata e quindi il comportamento del terreno è stato ritenuto “drenato”. Successivamente l'analisi ha tenuto conto anche delle sovrappressioni interstiziali e della loro dissipazione, con una analisi di consolidazione durante l'evento sismico.

Per l'analisi “drenata” il terreno è costituito da un unico strato di altezza 50m avente parametri della *Toyoura Sand*, alla base del quale è stato applicato l'accelerogramma di Colfiorito filtrato ad una frequenza di 1.8 Hz.

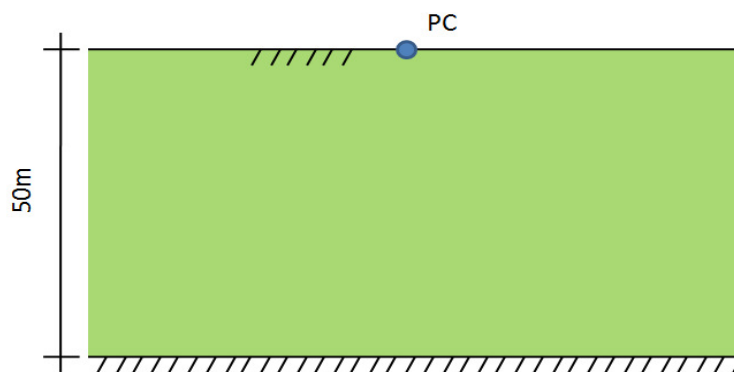


Figura 7.5.9: Stratigrafia per l'analisi della risposta sismica locale. Analisi “drenata”.

Per l'analisi di consolidazione (approccio  $u-p$ ) invece è stato considerato un terreno stratificato saturo, la cui stratigrafia è stata illustrata in Figura 7.2.1 con indice dei vuoti dello strato superiore corrispondente ad una densità relativa  $D_r=85\%$  (Figura 7.2.2). In questo caso sono stati applicati alla base del modello i dati sismici relativi alla storia temporale delle accelerazioni di Tolmezzo-Diga Ambiesta, componente WE ( $a_g = 0.315g$ ).

Il perfetto accordo,esia tra le velocità registrate in superficie nel punto PC (Figura 7.5.10 e 7.5.12) sia tra le curve sforzi-deformazioni ricavate in un punto di Gauss di un elemento della colonna (Figura

7.5.11), confermano la correttezza dell'implementazione del modello DM.

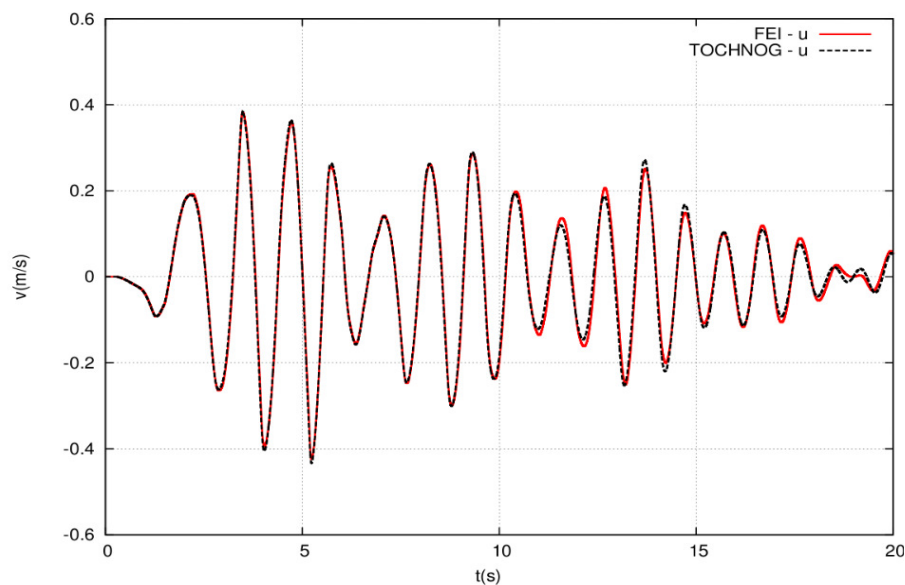


Figura 7.5.10: Analisi “drenata”. Andamento temporale delle velocità in superficie. Confronto tra i risultati ottenuti da Tochnog e quelli ottenuti da FEI (Davis, California).

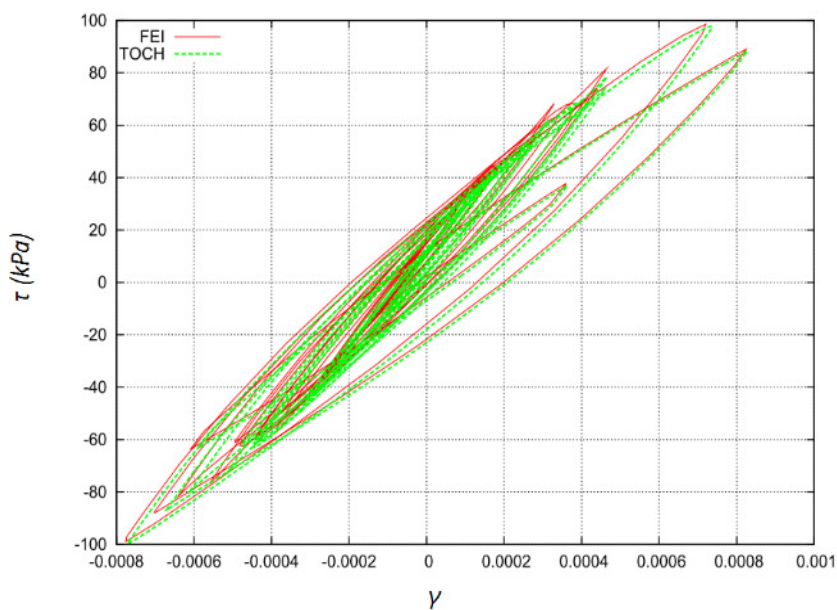


Figura 7.5.11: Analisi “drenata”. Confronto tra le curve sforzi-deformazioni ottenute con TOCHNOG e FEI per un punto della stratigrafia.

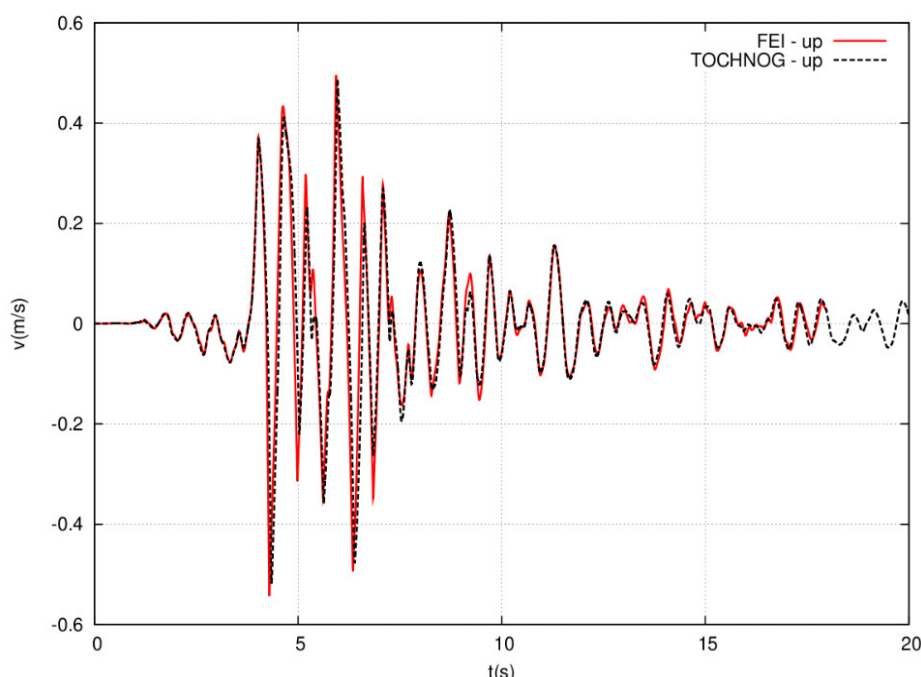


Figura 7.5.12: Analisi di “consolidazione” - approccio  $u-p$ . Andamento temporale delle velocità in superficie (punto PC). Confronto tra i risultati ottenuti da Tochnog e quelli ottenuti da FEI (Davis, California).

### 7.5.2.2 Interazione terreno-struttura

L'ultimo confronto ha riguardato il moto in superficie in presenza di interazione terreno-struttura.

Il terreno è stato modellato con elementi isoparametrici a 27 nodi, mentre il palo costituito da elementi tipo "*turrs-beam*" collegati ai nodi della mesh con altri elementi (tridimensionali) dello stesso tipo in modo da resistere a sforzi assiali e garantire la planarità di ciascuna sezione (Figura 7.4.1). Il modello costitutivo utilizzato per questo tipo di elementi è elastico lineare con modulo di elasticità pari a 30 GPa, corrispondente ad un calcestruzzo di classe 25  $f_{ck}$ . Il palo ha un diametro di 1m, lunghezza di 20m ed è stato lasciato libero di ruotare in testa.

La stratigrafia presa in esame è quella utilizzata anche per l'analisi di risposta sismica locale in condizioni di campo libero (con approccio  $u-p$ ), illustrata nel paragrafo precedente.

L'andamento nel tempo della velocità (rappresentato in Figura 7.5.13) mostra un perfetto accordo nelle due analisi confermando ulteriormente la correttezza dei risultati.



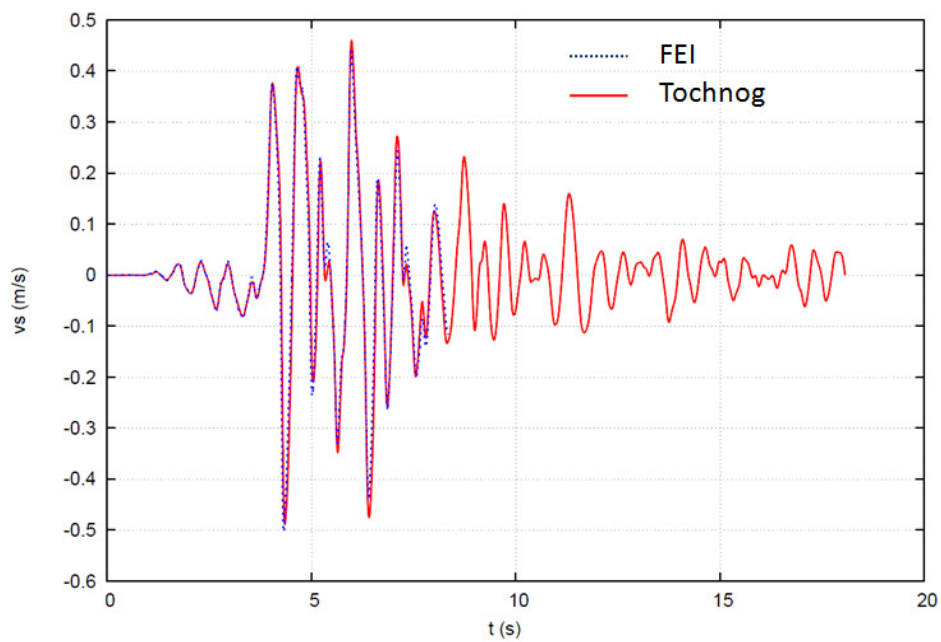


Figura 7.5.13: Confronto tra le velocità orizzontali registrate in testa al palo con i due codici: Tochnog e FEI.

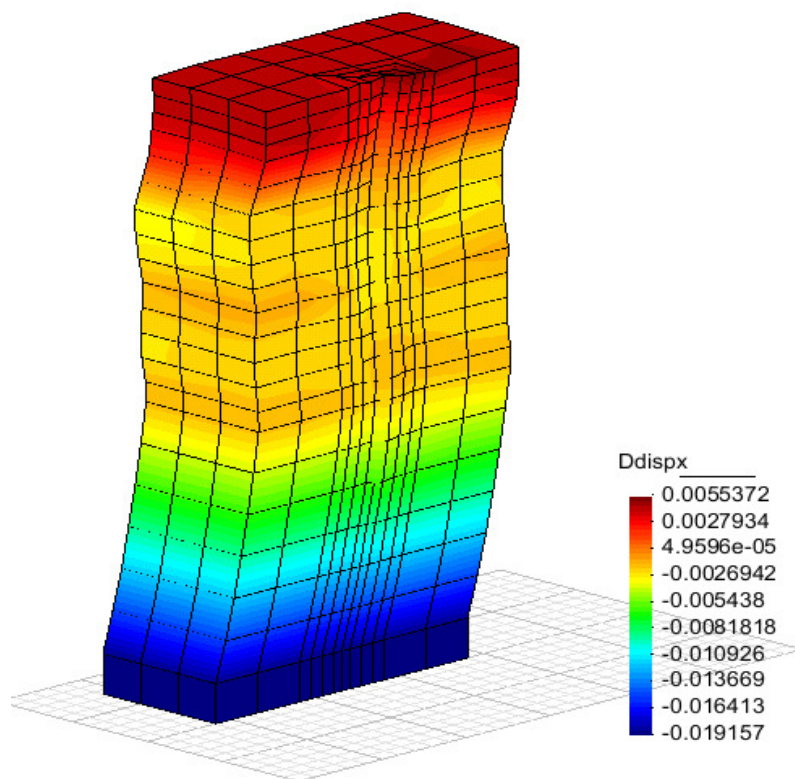


Figura 7.5.14: Rappresentazione grafica in GID dei risultati ottenuti con FEI.  
Spostamenti orizzontali in una configurazione deformata della *mesh* ad un fissato istante temporale.



## Capitolo 8

# **CONFRONTO CON I RISULTATI DEI METODI SEMPLIFICATI**

## 8.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo sono state messe a confronto le capacità predittive dei metodi semplificati, utilizzati per la valutazione della risposta sismica locale (in assenza di struttura) e per la stima delle sollecitazioni indotte nel palo a causa dell'interazione cinematica.

In primo luogo è stata esaminata la capacità di riprodurre il moto di campo libero utilizzando la teoria della propagazione monodimensionale delle onde in mezzi viscoelastici lineari equivalenti ed elastici lineari, entrambi disponibili in EERA (applicazione di Excel).

In secondo luogo è stata analizzata la capacità di prevedere le massime sollecitazioni indotte nel palo a seguito dell'interazione cinematica, utilizzando alcuni metodi semplificati descritti nel primo capitolo. Questi confronti hanno riguardato solamente un palo di 20m di lunghezza e 1m di diametro. Le sollecitazioni massime prese a confronto sono state sia i momenti flettenti in testa sia quelli al contatto stratigrafico per ciascuna delle due densità relative dello strato superiore (55 e 85%).

## 8.2 ANALISI DELLA RISPOSTA SISMICA LOCALE IN EERA

Per calcolare la risposta sismica locale con un modello viscoelastico lineare o lineare equivalente, è stato necessario calibrare i parametri rappresentativi del comportamento del materiale.

Per il primo sono sufficienti solamente la densità, la velocità di propagazione delle onde di taglio e lo smorzamento. Essi sono relativi a ciascuno strato e sono costanti per tutta l'analisi. Dal momento che la rigidezza del materiale è funzione dello stato tensionale, è stato opportuno suddividere la colonna in sottostrati a rigidezza costante.

Per il mezzo viscoelastico lineare equivalente, invece, sono richieste anche le curve di variazione del modulo di taglio e dello smorzamento in funzione della deformazione di taglio. Queste curve dipendono dal tipo di materiale, dallo stato tensionale e dal numero di cicli.

L'approccio viscoelastico lineare o lineare equivalente rappresenta una via semplice per valutare la risposta sismica monodimensionale ma non può tenere in conto gli effetti dovuti agli incrementi di pressione interstiziale che si sviluppano durante la propagazione ondosa. Per questo motivo il confronto è stato fatto prendendo a riferimento solamente la risposta sismica locale “drenata” ottenuta con il modello di *Dafalias & Manzari (2004)* (DM).

In seguito è stato descritto il procedimento che ha consentito di determinare i parametri del modello viscoelastico lineare e lineare equivalente.

### 8.2.1 Il modello viscoelastico lineare equivalente

I parametri del modello sono stati ricavati dividendo la colonna di terreno di 30 metri in 4 strati omogenei di uguale spessore. In corrispondenza del baricentro di ciascuno strato è stato ricavato lo stato tensionale medio efficace e l'indice dei vuoti corrispondente (Figura 8.2.1).

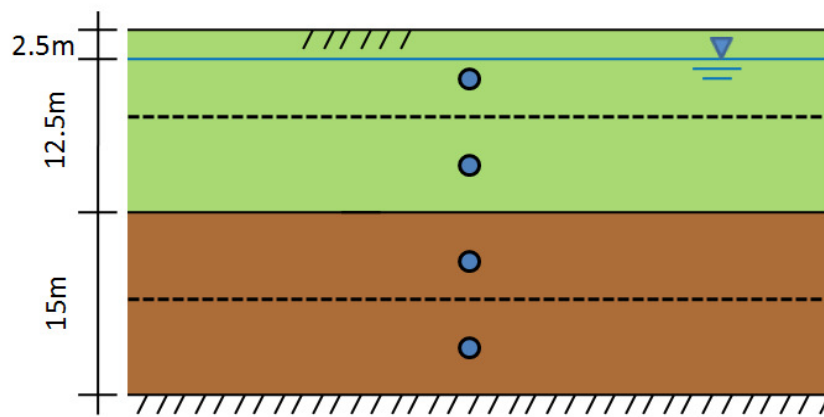


Figura 8.2.1: Suddivisione dei due strati in sottostrati.

Utilizzando il driver di *Niemunnis*, che integra in un solo punto di Gauss il legame costitutivo DM, sono state simulate diverse prove di taglio semplice imponendo una legge sinusoidale di variazione della deformazione di taglio, con valore massimo pari a  $\gamma_{max}$ . Il numero di cicli equivalente ai terremoti di Tolmezzo e Sturno è stato stimato dall'abaco di *Seed et al. (1975)* in funzione della Magnitudo. Terminata la prova è stata ricavata la rigidezza equivalente pari a quella secante l'ultimo ciclo ( $G_{sec} = \tau_{max} / \gamma_{max}$ ) ed è stato calcolato lo smorzamento equivalente sulla base dell'area dell'ultimo ciclo ( $W_d$ ) con le relazioni (Figura 8.2.2):

$$W_e = 0.5 \gamma_{max} \tau_{max} ;$$

$$\xi = W_d / (4 \pi W_e) .$$

Nota la rigidezza a piccole deformazioni è stato possibile ricavare le curve di variazione della rigidezza al taglio e dello smorzamento in funzione della deformazione  $\gamma_{max}$ .

Queste relazioni, ricavate per i terreni granulari utilizzati nello studio parametrico, sono fortemente

dipendenti dallo stato tensionale efficace. Inoltre, il loro andamento non è perfettamente regolare come quello delle relazioni di *Ishibashi & Zhang (1993)* o di *Vucetic & Dobry (1991)*, ma presenta livelli deformativi per i quali la rigidità si riduce fortemente ed altri per i quali si mantiene pressoché costante. Considerazioni analoghe possono essere fatte per le curve relative allo smorzamento.

E' importante precisare che le prove di taglio semplice non sono prove a pressione media costante. La tensione verticale durante i cicli rimane costante ma quelle orizzontali sono influenzate dalla dilatanza. Se lo stato tensionale corrispondente alla condizione iniziale di carico si trova sotto la superficie di dilatanza e se le deformazioni di taglio applicate durante la prova sono modeste, lo stato tensionale non oltrepassa tale superficie e il suo comportamento risulta contraente. Se invece le deformazioni sono significative, la superficie viene superata e il materiale tende ad aumentare di volume. Durante la prova, le deformazioni laterali sono impedita e quindi la pressione media tende a diminuire per deformazioni modeste, mentre aumenta se si applicano deformazioni significative.

In conclusione le non regolarità delle curve di variazione del modulo di taglio e dello smorzamento sono dovute essenzialmente alla variazione della pressione efficace media che prodotta durante le prove (Figura 8.2.3, Figura 8.2.4). Infatti, se si conducessero prove di taglio semplice imponendo una pressione media efficace costante al posto del vincolo sulle deformazioni laterali, si otterrebbero curve di variazione molto regolari e molto simili alle relazioni empiriche, come quelle illustrate in (Figura 8.2.5, Figura 8.2.6, Figura 8.2.7, Figura 8.2.8).

Le formule di *Isibashi e Zhang (1993)* consentono di ottenere direttamente una relazione tra  $G/G_{max}$  e  $\gamma$  e un'altra tra  $\xi(\%)$  e  $\gamma$ , noto l'indice di plasticità (IP) del terreno e la pressione efficace media  $p'$ .

$$\frac{G}{G_{max}} = K(\gamma, I_p) p'^{m(\gamma, I_p) - m_0} \quad (8.2.1)$$

$$K(\gamma, I_p) = 0.5 \left\{ 1 + \tanh \left[ \ln \left( \frac{0.000102 + n(I_p)}{\gamma} \right)^{0.492} \right] \right\} \quad (8.2.2)$$

$$m(\gamma, I_p) - m_0 = 0.272 \left[ 1 - \tanh \left[ \ln \left( \frac{0.000566}{\gamma} \right)^{0.4} \right] \right] \exp(-0.0145 I_p^{1.3}) \quad (8.2.3)$$

e  $n(I_p) = 0$  per  $I_p = 0$ .

Lo smorzamento è valutato:

$$\xi = 0.333 \frac{1 + \exp(-0.0145 I_p^{1.3})}{2} \left[ 0.586 \left( \frac{G}{G_{max}} \right)^2 - 1.547 \frac{G}{G_{max}} + 1 \right] \quad (8.2.4)$$

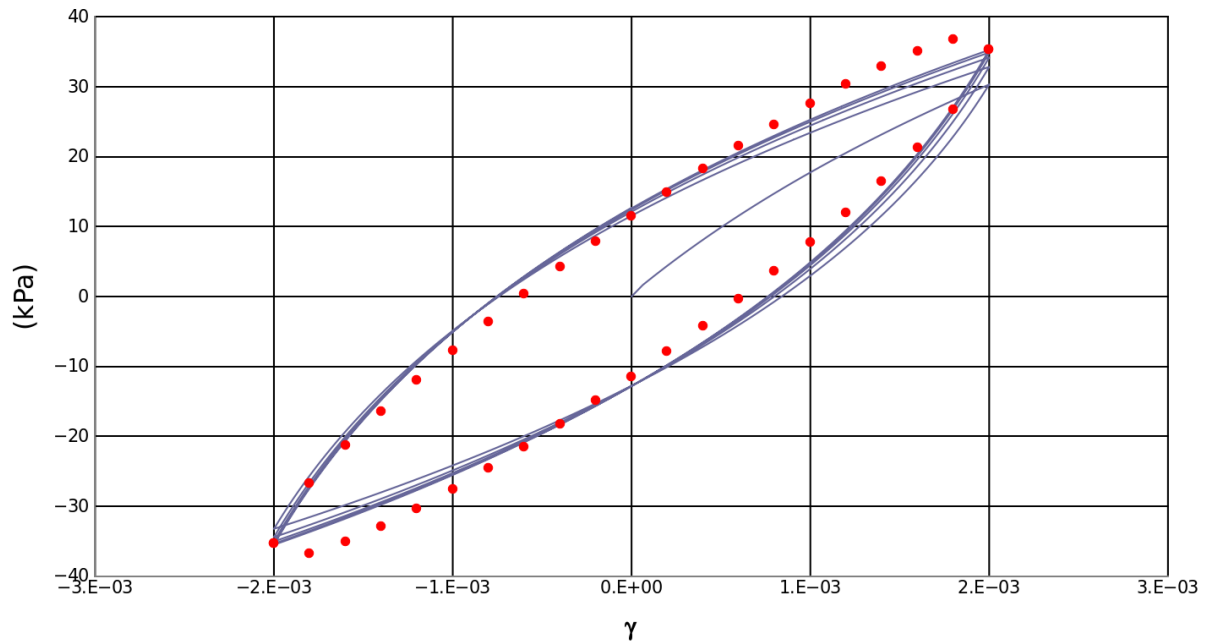


Figura 8.2.2: Confronto tra la simulazione di una prova di taglio semplice ottenuta con il modello di *Dafalias & Manzari (2004)* (linea continua) e la risposta del modello lineare equivalente (punti) la cui rigidità e smorzamento equivalenti sono stati ricavati dall'ultimo ciclo della simulazione.

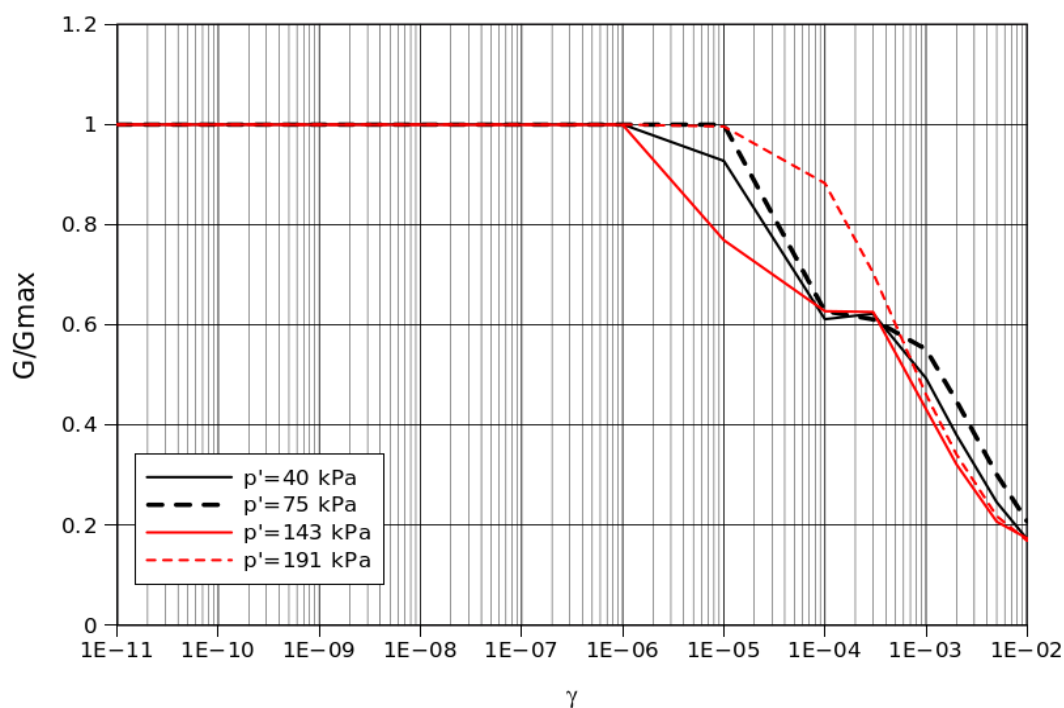


Figura 8.2.3: Curve di variazione dello rigidezza con la deformazione di taglio per ciascuna pressione media iniziale.

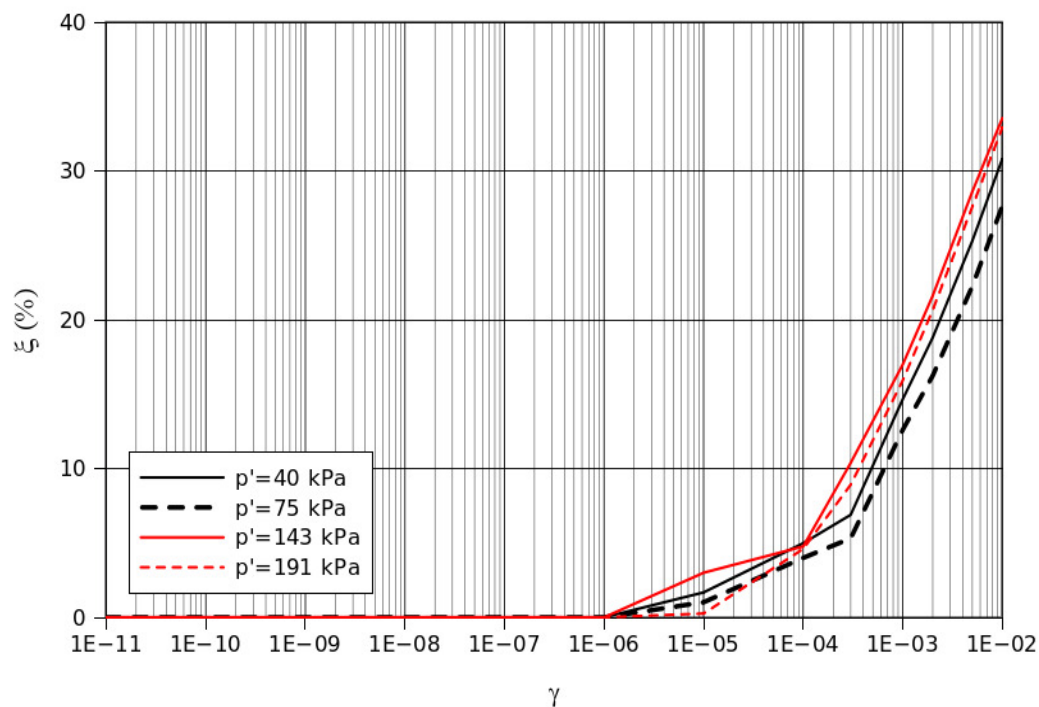


Figura 8.2.4: Curve di variazione dello smorzamento con la deformazione di taglio per ciascuna pressione media iniziale.

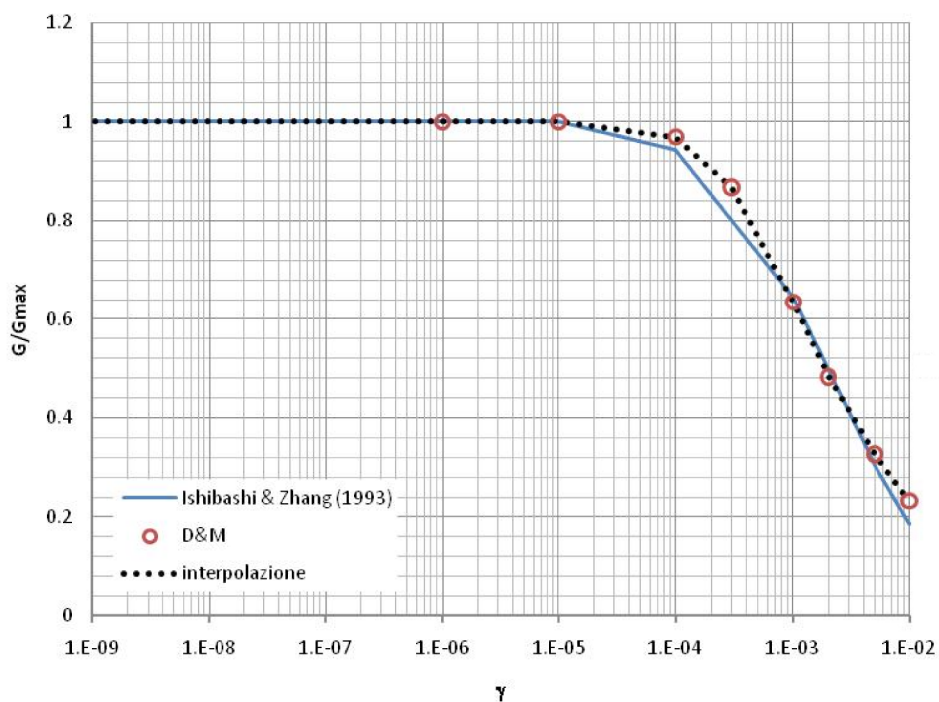


Figura 8.2.5: Confronto tra una curva di variazione del modulo, a pressione media costante, ottenuta con il modello DM(2004) e quella fornita dalla relazione di I&Z(1993).

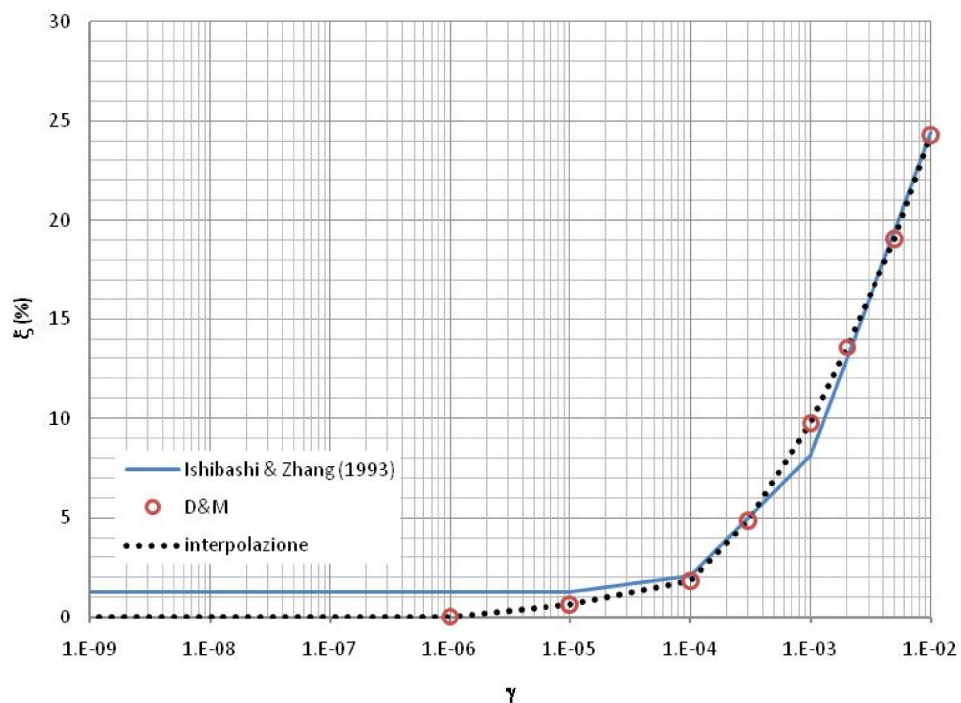


Figura 8.2.6: Confronto tra una curva di variazione dello smorzamento, a pressione media costante, ottenuta con il modello DM(2004) e quella fornita dalla relazione di I&Z(1993).



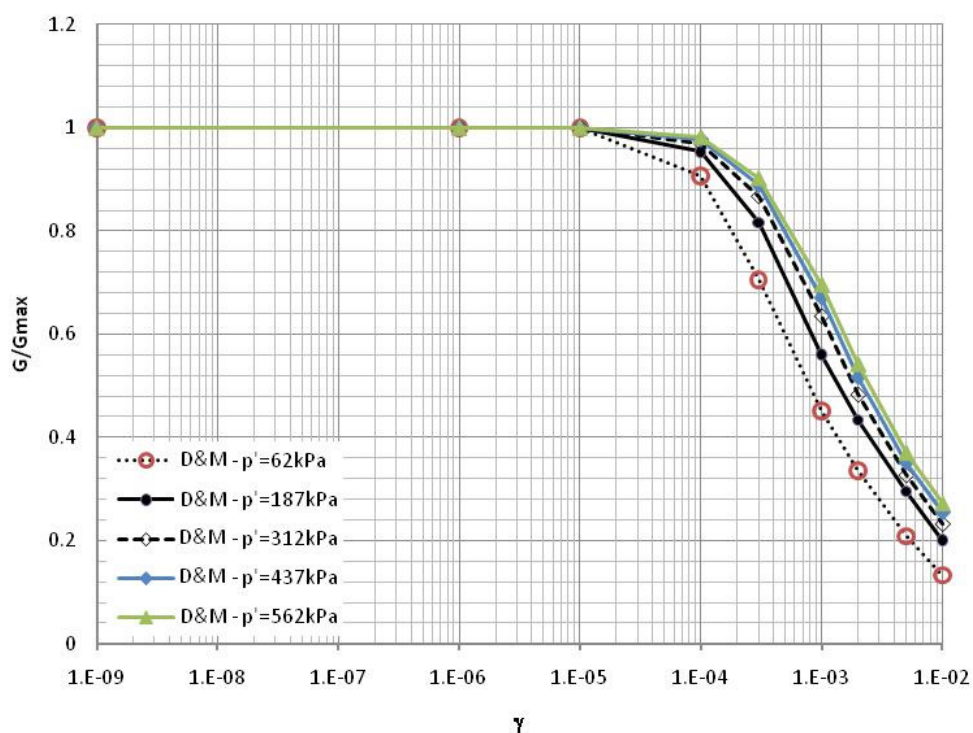


Figura 8.2.7: Confronto tra le curve di variazione della rigidezza equivalente, ottenute con il modello DM a pressione media costante.

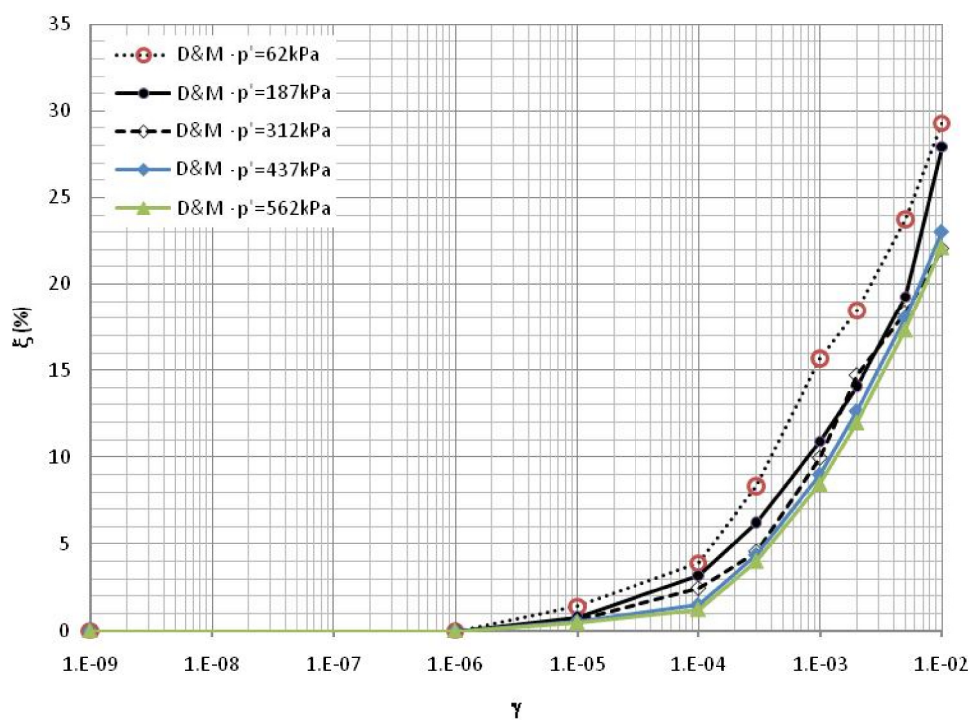


Figura 8.2.8: Confronto tra le curve di variazione dello smorzamento equivalente, ottenute con il modello DM a pressione media costante.

### 8.2.2 Modello viscoelastico lineare

Le analisi con il modello viscoelastico lineare sono state caratterizzate da parametri costanti e indipendenti dalla deformazione. In particolare, sono state condotte due analisi. La prima con rigidezza pari al 50% di quella iniziale e smorzamento pari al 10%. La seconda invece sempre con smorzamento pari al 10% ma rigidezza pari proprio a quella iniziale.

### 8.2.3 Risultati delle analisi

I risultati delle analisi sono stati espressi illustrando lo spettro di risposta delle accelerazioni del segnale in superficie e il profilo delle deformazioni di taglio massimo con la profondità. (Figura 8.2.9, Figura 8.2.10, Figura 8.2.11, Figura 8.2.12, Figura 8.2.13, Figura 8.2.14, Figura 8.2.15, Figura 8.2.16).

Dalle figure si evince che sono state condotte due analisi elastiche lineari, delle quali una con rigidezza pari a quella a piccole deformazioni ( $EL(E=E_0)$ ) e l'altra con rigidezza pari al 50% ( $EL(E=0.5E_0)$ ). Inoltre sono presenti due curve relative all'approccio lineare equivalente, una denominata LE e l'altra LE\*. La prima è stata ottenuta da analisi che associano una curva di variazione del modulo e dello smorzamento a ciascuna delle quattro zone in cui è divisa la colonna di terreno, come descritto nel paragrafo precedente. La curva LE\*, invece, è stata ottenuta da analisi che associano allo strato superiore soltanto una curva di variazione ricavata in corrispondenza del baricentro dello strato.

I risultati consentono di affermare che l'approccio lineare equivalente, purché correttamente calibrato (LE\*), consente di riprodurre con sufficiente approssimazione il moto in superficie e le deformazioni massime raggiunte lungo tutta la colonna nell'ipotesi di comportamento drenato del terreno. L'approccio elastico lineare, invece, da un lato consente di determinare le deformazioni massime raggiunte nel sottosuolo (anche se con un errore in alcuni casi non trascurabile) ma dall'altro sovrastima la risposta in superficie (legata principalmente all'incertezza sullo smorzamento).

E' importante sottolineare che la capacità previsionale del modello viscoelastico lineare equivalente è soddisfacente solo per condizioni drenate o nel caso di materiali molto densi, per i quali gli incrementi di pressione interstiziale hanno valori contenuti. Al contrario, in presenza di terreni per i quali il contributo delle  $\Delta u$  è significativo, la previsione fornita da questo approccio risulta inaccurata. Infatti, in Figura 8.2.17, Figura 8.2.18, Figura 8.2.19 e Figura 8.2.20 sono stati rappresentati gli spettri

elastici di risposta del segnale in superficie, ottenuto con il modello DM per le diverse analisi (drenate, non drenate e di consolidazione). Queste curve sono quasi sovrapposte soltanto se il materiale è addensato; sono invece molto differenti se il materiale è più sciolto, per il quale il contributo delle  $\Delta u$  non è più trascurabile.

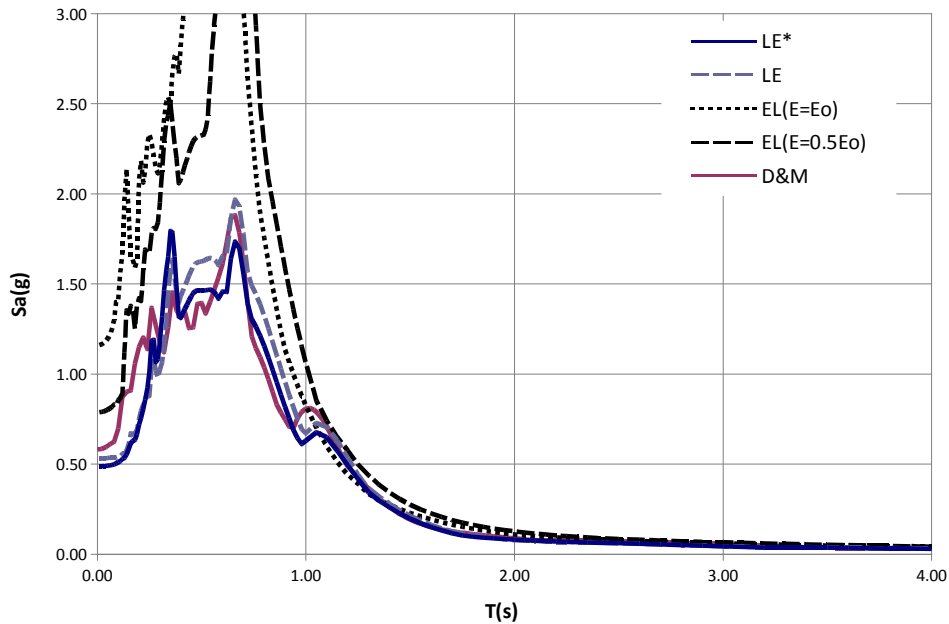


Figura 8.2.9: Spettri elastici di risposta del segnale in superficie ottenuto applicando l'accelerogramma di Tolmezzo alla base. Confronto tra i diversi approcci.  $D_r=85\%$ .

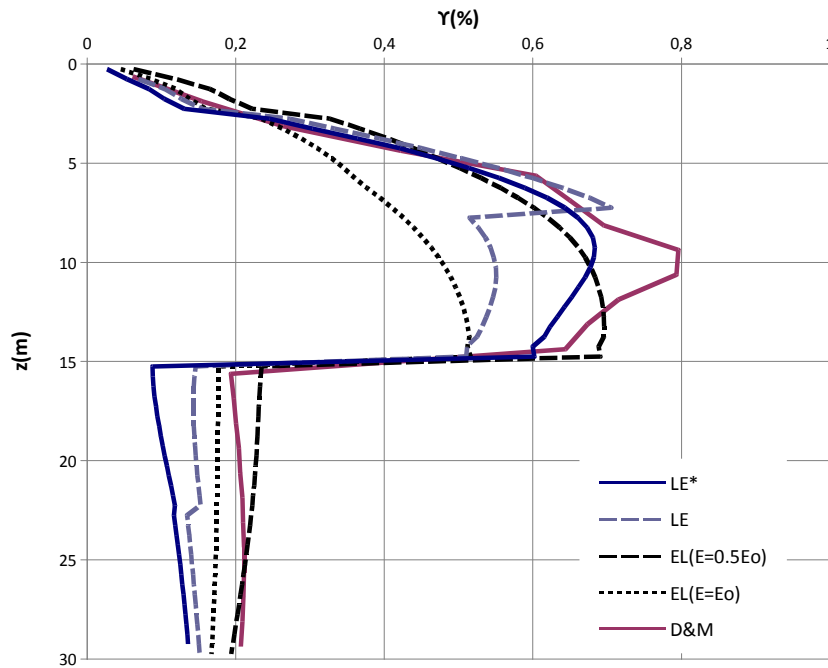


Figura 8.2.10: Inviluppo delle deformazioni massime indotte nel terreno dall'applicazione dell'accelerogramma di Tolmezzo alla base. Confronto tra i diversi approcci.  $D_r=85\%$ .

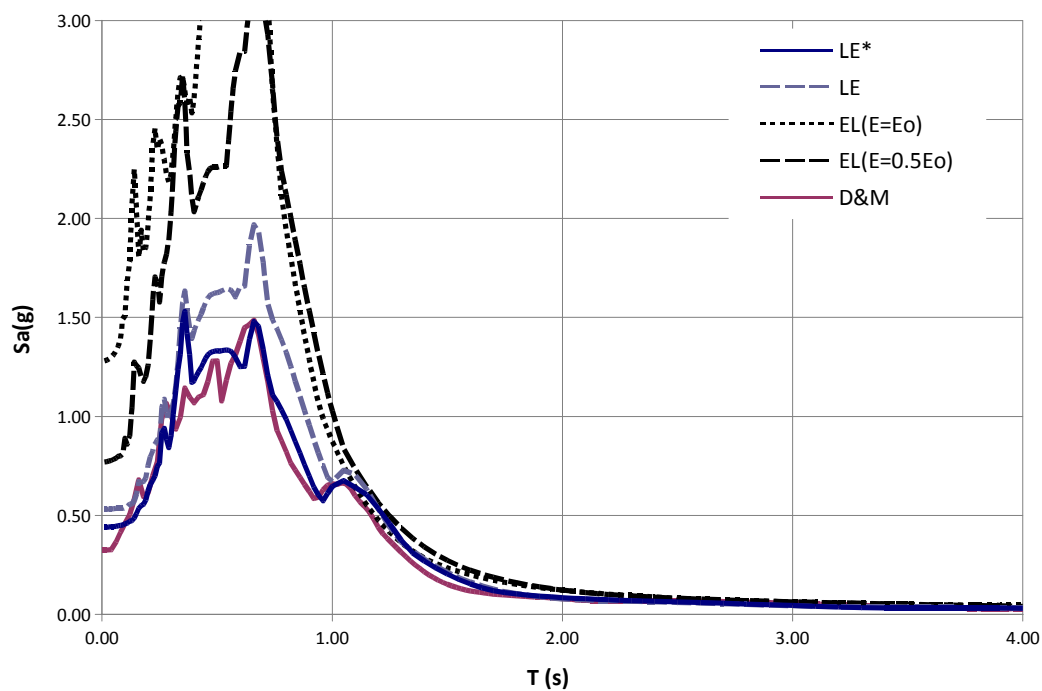


Figura 8.2.11: Spettri elastici di risposta del segnale in superficie ottenuto applicando l'accelerogramma di Tolmezzo alla base. Confronto tra i diversi approcci.  $D_r=55\%$ .

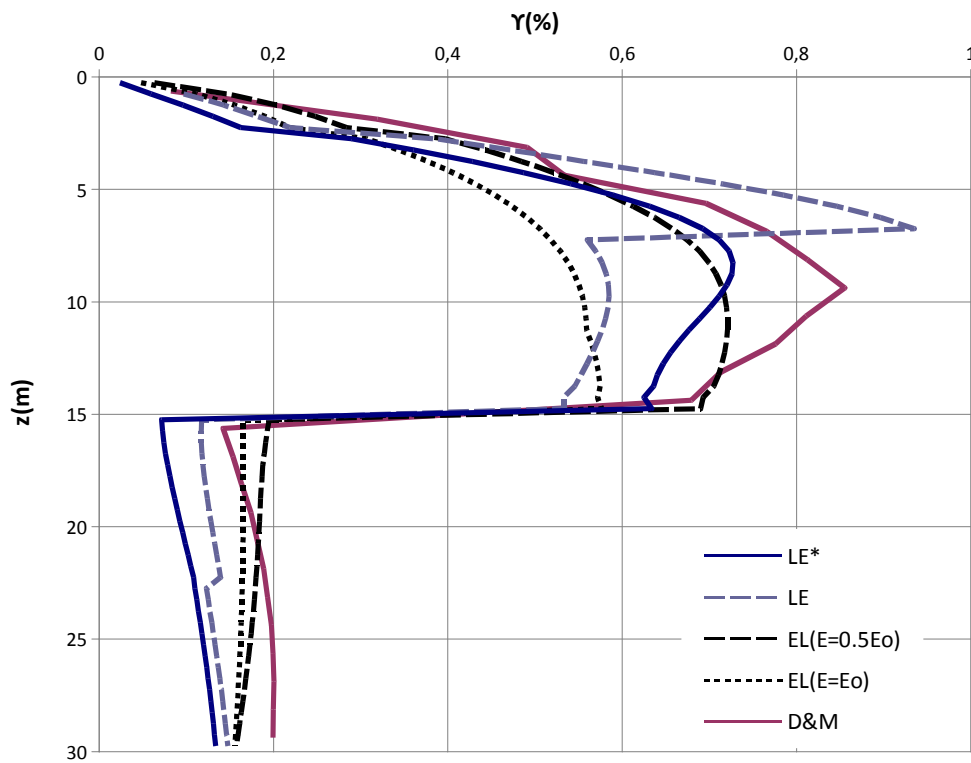


Figura 8.2.12: Involuppo delle deformazioni massime indotte nel terreno dall'applicazione dell'accelerogramma di Tolmezzo alla base. Confronto tra i diversi approcci.  $D_r=55\%$ .

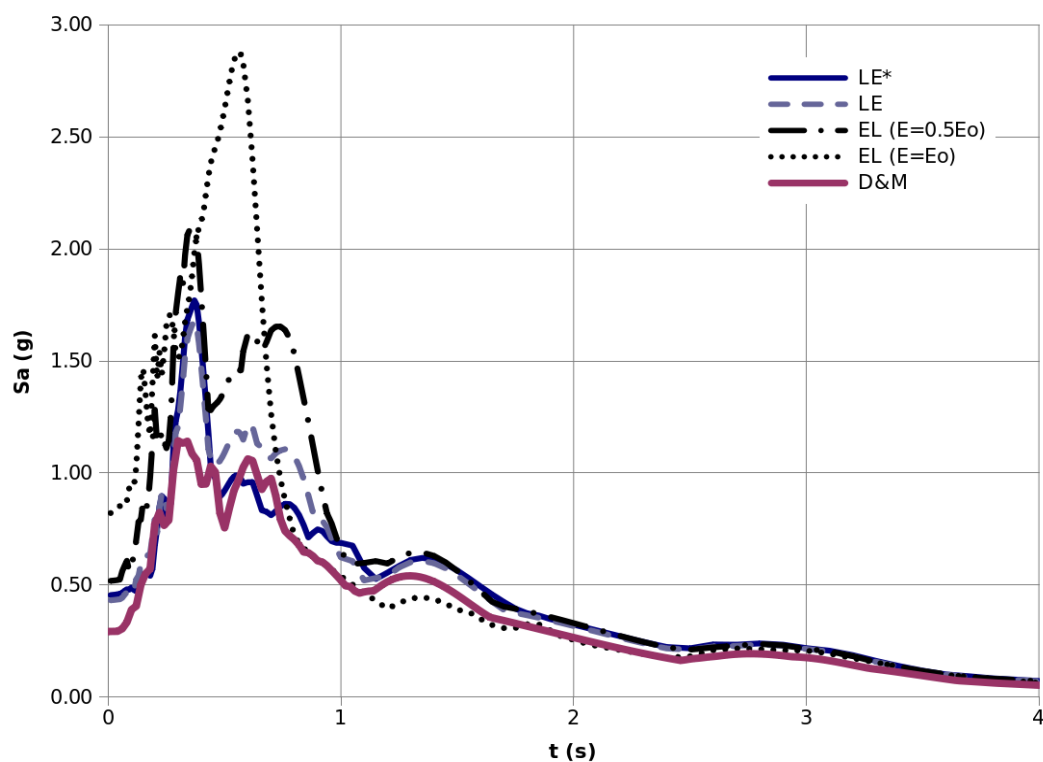


Figura 8.2.13: Spettri elastici di risposta del segnale in superficie ottenuto applicando l'accelerogramma di Sturmo alla base. Confronto tra i diversi approcci.  $D_r=85\%$ .

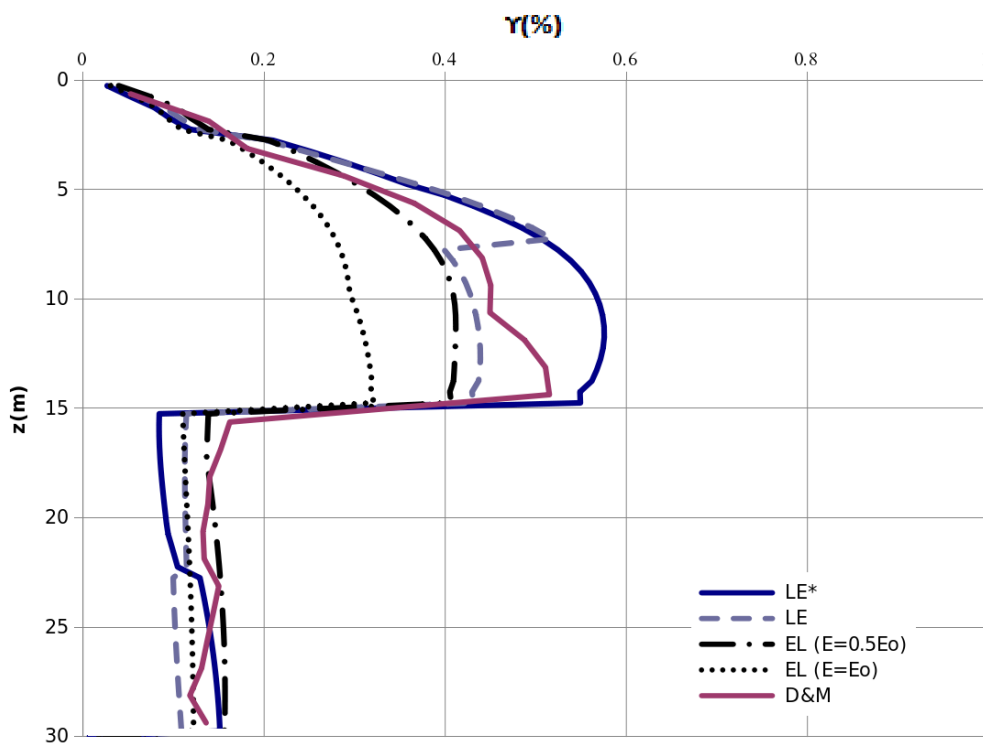


Figura 8.2.14: Involuppo delle deformazioni massime indotte nel terreno dall'applicazione dell'accelerogramma di Sturmo alla base. Confronto tra i diversi approcci.  $D_r=85\%$ .

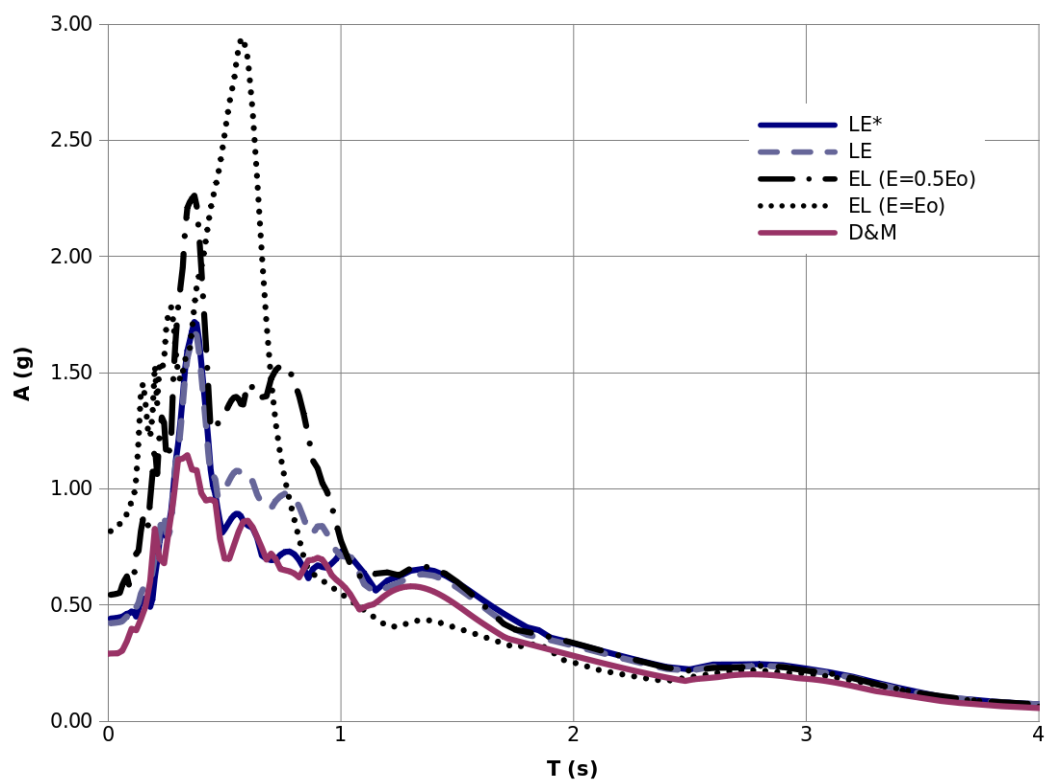


Figura 8.2.15: Spettri elastici di risposta del segnale in superficie ottenuto applicando l'accelerogramma di Sturno alla base. Confronto tra i diversi approcci.  $D_r=55\%$ .

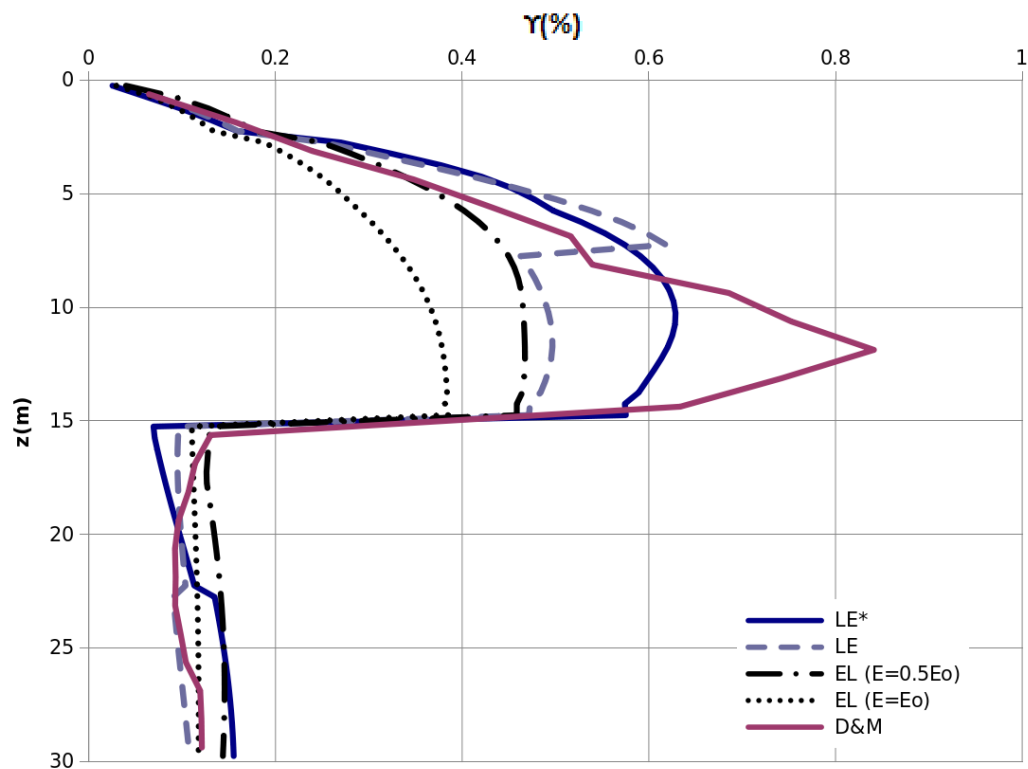


Figura 8.2.16: Involuppo delle deformazioni massime indotte nel terreno dall'applicazione dell'accelerogramma di Sturno alla base. Confronto tra i diversi approcci.  $D_r=55\%$ .

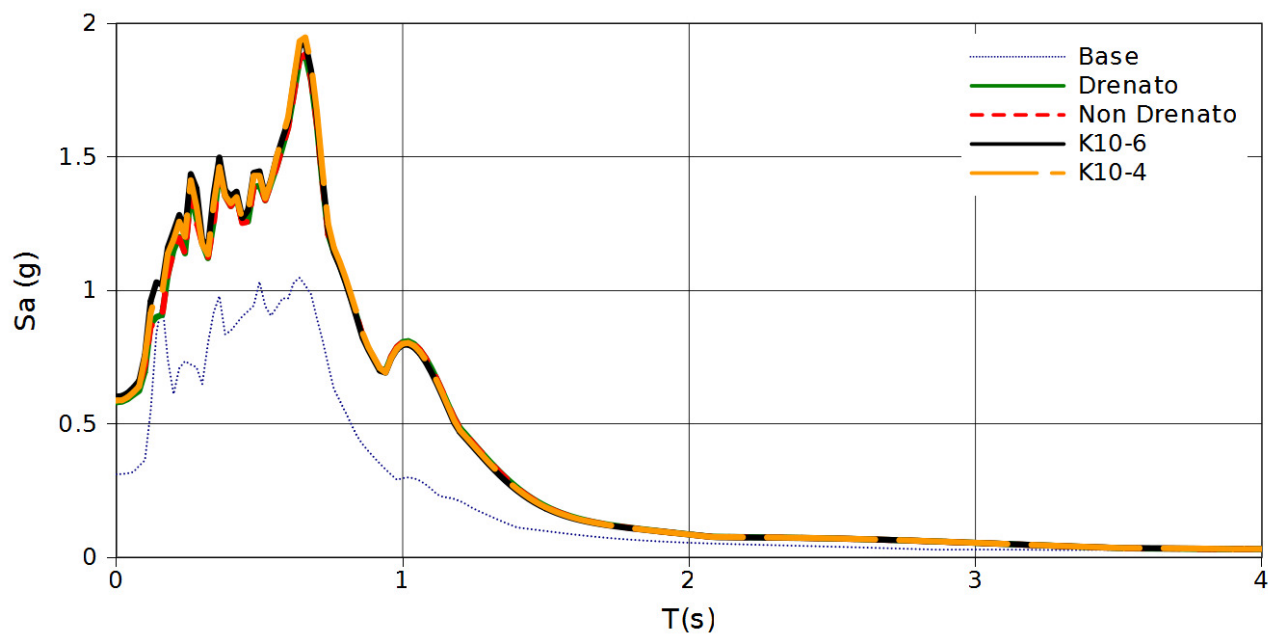


Figura 8.2.17: Spettri elastici di risposta del segnale in superficie ottenuto applicando l'accelerogramma di Tolmezzo alla base e utilizzando il modello DM. Confronto tra le diverse analisi.  $D_r=85\%$ .

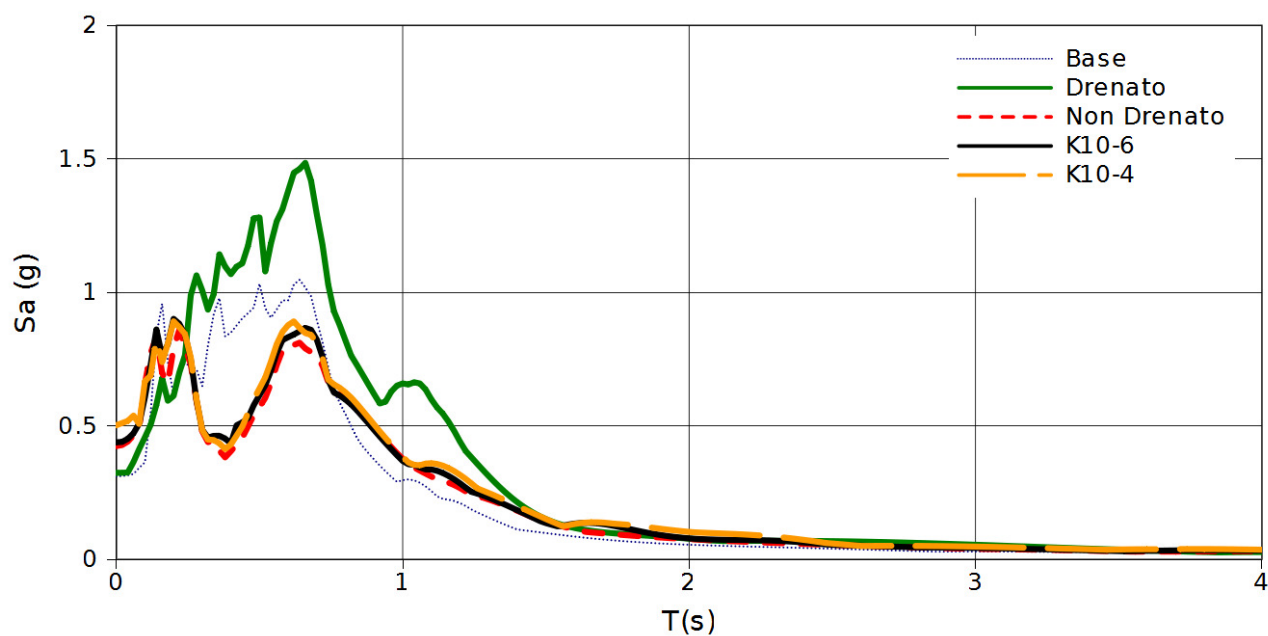


Figura 8.2.18: Spettri elastici di risposta del segnale in superficie ottenuto applicando l'accelerogramma di Tolmezzo alla base e utilizzando il modello DM. Confronto tra le diverse analisi.  $D_r=55\%$ .

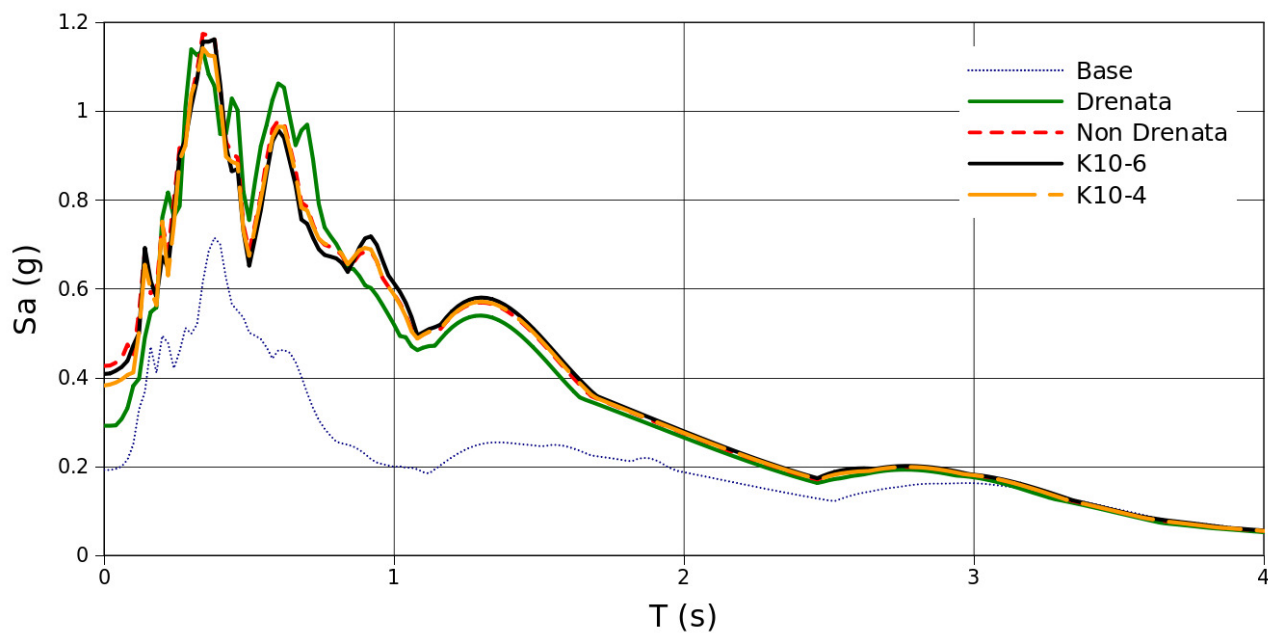


Figura 8.2.19: Spettri elastici di risposta del segnale in superficie ottenuto applicando l'accelerogramma di Sturmo alla base e utilizzando il modello DM. Confronto tra le diverse analisi.  $D_r=85\%$ .

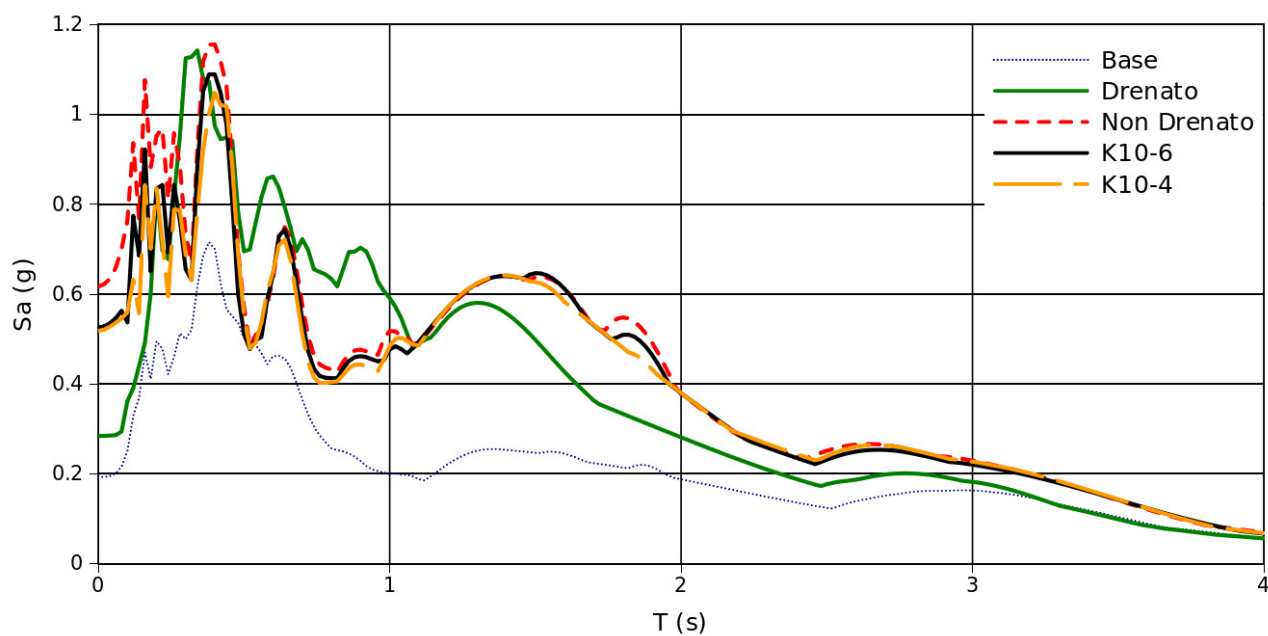


Figura 8.2.20: Spettri elastici di risposta del segnale in superficie ottenuto applicando l'accelerogramma di Sturmo alla base e utilizzando il modello DM. Confronto tra le diverse analisi.  $D_r=55\%$ .



### 8.3 I METODI SEMPLIFICATI PER LE SOLLECITAZIONI FLETTENTI NEI PALI

In questo paragrafo è stata analizzata la capacità di prevedere le massime sollecitazioni indotte nel palo dall'interazione cinematica, utilizzando alcuni metodi semplificati descritti nel primo capitolo e riassunti nella tabella sottostante. Essa infatti riassume tali metodi, distinguendo quelli relativi al contatto stratigrafico da quelli ideati per la testa del palo ed elenca i dati di ingresso necessari per il loro utilizzo. Il confronto ha riguardato soltanto il palo di diametro 1 m e di lunghezza 20 m, prendendo come riferimento il valore del momento massimo raggiunto in corrispondenza della testa e del contatto stratigrafico.

Come ampiamente descritto nel capitolo precedente, il palo di queste dimensioni ha una parte immersa nello strato rigido inferiore di lunghezza tale da poter confinare adeguatamente la base, cosicché il palo può essere considerato infinitamente lungo. Inoltre, la distanza del contatto stratigrafico dalla testa è tale da poter escludere qualsiasi fenomeno di interazione tra i momenti flettenti indotti nelle due sezioni. Il rispetto di queste due condizioni è stato necessario per poter operare questo confronto, poiché esse sono due ipotesi sulle quali i metodi sotto riportati si basano.

METODO	CONTATTO STRATIGRAFICO	TESTA
<i>Dobry &amp; O'Rourke (1983)</i>	$G_2/G_1, G_1, \gamma_1$	-
<i>Mylonakis (2001)</i>	$G_2/G_1, G_1, \gamma_1, h_1, \omega$	-
<i>Di Laora et al. (2011)</i>	$G_2/G_1, G_1, \gamma_1, h_1$	-
<i>Nikolaou et al. (2001)</i>	$G_2/G_1, G_1, a_{ff}, N_c$	-
<i>Cairo et al. (2011)</i>	$G_2/G_1, G_1, a_{ff}, T_1$	-
<i>Sica e Simonelli (2008)</i>	$G_2/G_1, G_1, a_{ff}, \tau_{max, EERA}$	-
<i>Di Laora (2009)</i>	$G_2/G_1, G_1, \gamma_1^*, \gamma_2^*, (h_1)$	-
<i>Dezi (2010)</i>	$a_{max}, v_{s,1}, h_1$	$a_{max}, v_{s,1}, h_1$
<i>NEHRP (1997)</i>	-	$a_{ff}, v_{s,1}$

Tabella 8.3.1: Metodi semplificati utilizzati nello studio. Parametri di ingresso.

Lo studio è stato articolato in due livelli. Il primo ha consentito di stabilire, a parità di dati di ingresso, quale fosse il metodo più affidabile; il secondo, invece, ha messo in luce, per ciascun metodo utilizzato, la variabilità della soluzione in funzione dell'accuratezza dei dati di ingresso.

I confronti sono stati effettuati nel caso di densità relativa elevata ( $D_r=85\%$ ) ed intermedia ( $D_r=55\%$ ), per ciascuno dei due eventi sismici (Tolmezzo e Sturmo).

La grandezza utilizzata per il confronto è l'*errore relativo* definito nel seguente modo:

$$err(\%) = \frac{M^{MET} - M^{DM}}{M^{DM}} \cdot 100$$

dove  $M^{MET}$  è il valore del momento flettente massimo stimato da ciascun metodo semplificato e  $M^{DM}$  rappresenta invece quello ottenuto dalle simulazioni con il modello di DM.

I risultati sono stati rappresentati in istogrammi, relativi alla testa e all'interfaccia, nei quali comparire l'*errore relativo* per ciascun metodo utilizzato.

### 8.3.1 Confronto a parità di dati di ingresso

In questa prima fase i dati di ingresso dei metodi semplificati sono stati ricavati dai risultati delle analisi con il modello DM. Non tutti sono stati ottenuti in modo diretto dalla semplice analisi dei risultati ma alcuni sono stati ricavati sulla base di ipotesi esemplificative.

Per esempio, il modulo elastico equivalente del terreno è stato ricavato dalle deformazioni di taglio massime e dalle curve di decadimento. La frequenza fondamentale del deposito, inoltre, è stata determinata dal primo picco della funzione di amplificazione ottenuta da una analisi in EERA con il metodo lineare equivalente. In realtà un tentativo per ricavare la frequenza fondamentale anche dal rapporto tra lo spettro di Fourier del segnale in superficie e quello alla base è stato fatto ma questa procedura ha fornito valori in alcuni casi di non facile interpretazione.

I risultati (illustrati da Figura 8.3.1 a Figura 8.3.8) hanno mostrato che i metodi semplificati possono stimare sia per eccesso sia per difetto le “reali” sollecitazioni indotte in corrispondenza sia del contatto stratigrafico sia della testa. Alcuni metodi però sono più precisi poiché l'errore è contenuto mentre altri forniscono stime meno accurate. In seguito sono stati presi in esame in modo dettagliato i risultati forniti da ciascun metodo semplificato, separando quelli relativi al contatto stratigrafico da quelli ideati per la testa del palo.

### 8.3.1.1 Sollecitazioni al contatto stratigrafico

Ciascun metodo semplificato (di quelli in Tabella Errore: sorgente del riferimento non trovata) necessita un valore sufficientemente approssimato del modulo elastico equivalente dello strato superiore; così, nota la deformazione di taglio massima, la rigidezza equivalente è stata calcolata considerando un volume di terreno di spessore pari a circa 4 diametri sopra il contatto stratigrafico.

Il metodo di *Mylonakis (2001)* è stato impiegato trascurando la dipendenza della deformazione  $\epsilon_p$  dalla frequenza di eccitazione del segnale di *input*, utilizzando soltanto un coefficiente costante pari a 1,2 (*Sica et al. (2011)*). La rigidezza  $k$  delle molle inoltre è stata ricavata secondo la relazione:

$$\delta = \frac{k_1}{E_1} = \frac{k_2}{E_2}$$

$$\delta = 6 \left( \frac{E_p}{E_1} \right)^{-1/8}$$

dopo aver trascurato l'effetto del rapporto tra i moduli degli strati e il contributo della lunghezza del palo. L'analisi dei risultati ha consentito di affermare che il metodo è in grado di fornire stime sufficientemente accurate delle sollecitazioni nel palo.

I metodi di *Di Laora (2009)* e *Dobry & O'Rourke (1983)* invece hanno fornito previsioni nella maggior parte dei casi a sfavore di sicurezza. In particolare, il secondo metodo si avvale di una costante  $k$  del terreno pari a  $3G$  (dove  $G$  è il modulo di taglio equivalente del terreno) che è inferiore a quella utilizzata dai metodi di *Mylonakis (2001)* e di *Di Laora (2011)*.

Il metodo di *Nikolaou et al. (2001)* e di *Cairo et al. (2011)* hanno fornito risultati che sottostimano anche del 60% le “reali” sollecitazioni del palo. Entrambi i metodi correlano le sollecitazioni stimando la tensione tangenziale stazionaria all'interfaccia sulla base dell'accelerazione massima di campo libero ottenuta in superficie. La distanza tra il piano campagna e il contatto stratigrafico in generale è elevata e quindi la tensione di taglio, così ricavata, è particolarmente incerta. Inoltre, i risultati forniti dal primo metodo sono fortemente influenzati dalla stima della rigidezza del primo strato e dal numero di cicli equivalente  $N_e$ . Quest'ultimo, infatti, non può essere determinato direttamente dalle analisi con il modello DM, ma deve essere stimato dall'abaco di *Seed et al. (1975)*, avendo così una variabilità di oltre il 60% per terremoti di magnitudo corrispondente ai casi in esame.

*Cairo et al. (2011)*, invece, hanno proposto due correlazioni del fattore correttivo  $\eta$  da applicare

all'espressione di *Nikolaou et al. (2001)* valida per sollecitazioni stazionarie. L'espressione di  $\eta$  presa in esame nell'ambito di questo studio è funzione del rapporto tra  $T/T_1$ , dove  $T_1$  è il periodo proprio del deposito mentre  $T$  è il periodo fondamentale dell'accelerogramma calcolato con la relazione di *Rathje et al. (1998)*. Se da un lato questo metodo elimina l'incertezza associata al numero di cicli equivalente  $N_e$ , dall'altro esso mantiene la dipendenza dalla tensione tangenziale  $\tau_c$  all'interfaccia calcolata sulla base dell'accelerazione massima di campo libero in superficie (come in *Nikolaou et al. (2001)*) ed accentua, infine, l'importanza di una stima precisa del valore della rigidezza del sottosuolo da cui dipende l'entità del periodo fondamentale del deposito.

La relazione di *Dezi (2010)* è stata ricavata da una interpolazione di risultati ottenuti da uno studio parametrico, considerando un terreno stratificato con una rigidezza media superiore e coefficiente di smorzamento inferiore rispetto ai casi presi in esame in questa tesi. Proprio queste differenze nelle caratteristiche del sottosuolo sembrano essere la ragione principale delle stime particolarmente cautelative.

Il metodo di *Sica e Simonelli (2008)* non è stato utilizzato in questa prima fase, poiché esso richiede come dato di ingresso lo sforzo di taglio all'interfaccia calcolato con EERA.

I metodi che sembrano più soddisfacenti sono quelli di *Di Laora et al. (2011)* e *Mylonakis (2001)* che, nonostante la loro semplicità e trascurando il carattere dinamico del moto, consentono di stimare con ragionevole approssimazione le sollecitazioni massime indotte in corrispondenza dell'interfaccia tra gli strati. E' importante sottolineare tuttavia che, in presenza di eventi sismici con elevata Durata Significativa (es. Sturno), è possibile che questi due metodi forniscano stime in eccesso della sollecitazione ma questo aspetto è stato affrontato nel paragrafo 8.3.1.3.

### **8.3.1.2 Sollecitazioni in testa al palo**

Per quanto riguarda la testa del palo, i metodi semplificati che consentono di valutarne il momento flettente massimo sono quello presente nelle norme *NEHRP (1997)* e quello di *Dezi (2010)*. Quest'ultimo, come precedentemente affermato, è poco efficace per terreni così soffici. Il primo metodo invece, tenendo conto delle indicazioni di *Di Laora e Mandolini (2011)*, utilizza come dati di ingresso sia il valore massimo dell'accelerazione di campo libero sia la rigidezza dello strato superiore; quest'ultima calcolata in un volume di terreno di circa 5 diametri al di sotto del piano campagna. I risultati hanno fornito stime piuttosto attendibili con errori modesti, talvolta anche inferiori al 5%.

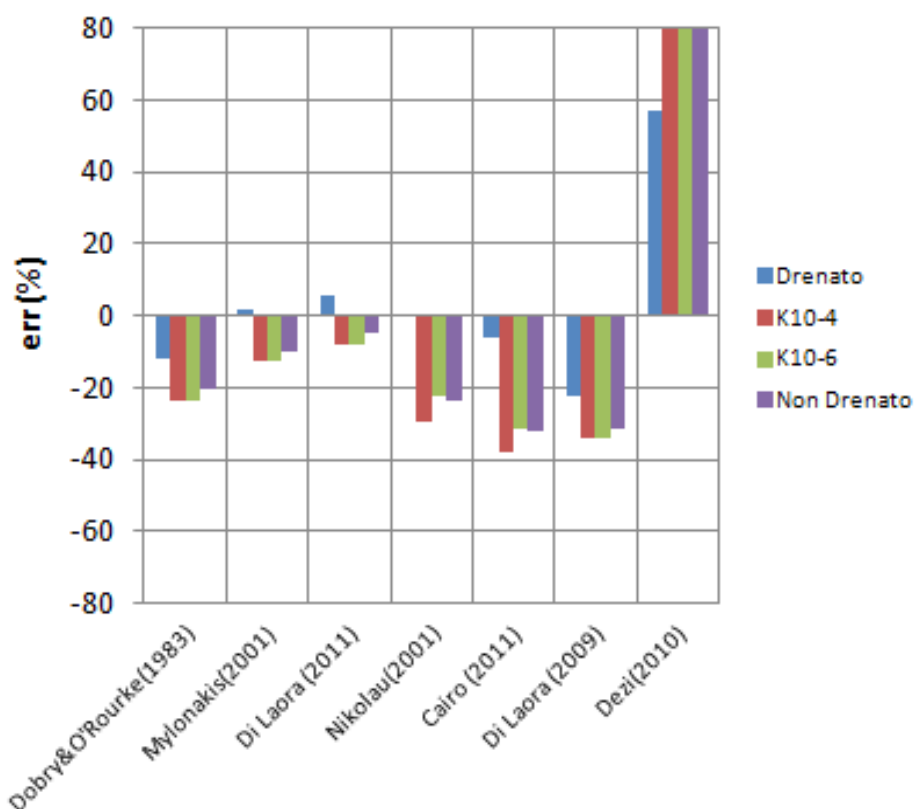


Figura 8.3.1: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Tolmezzo e  $Dr=85\%$ .

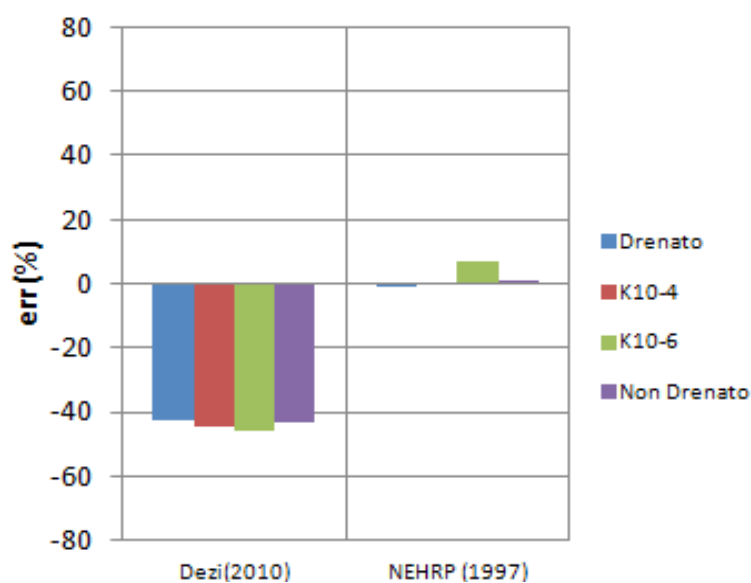


Figura 8.3.2: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Tolmezzo e  $Dr=85\%$ .

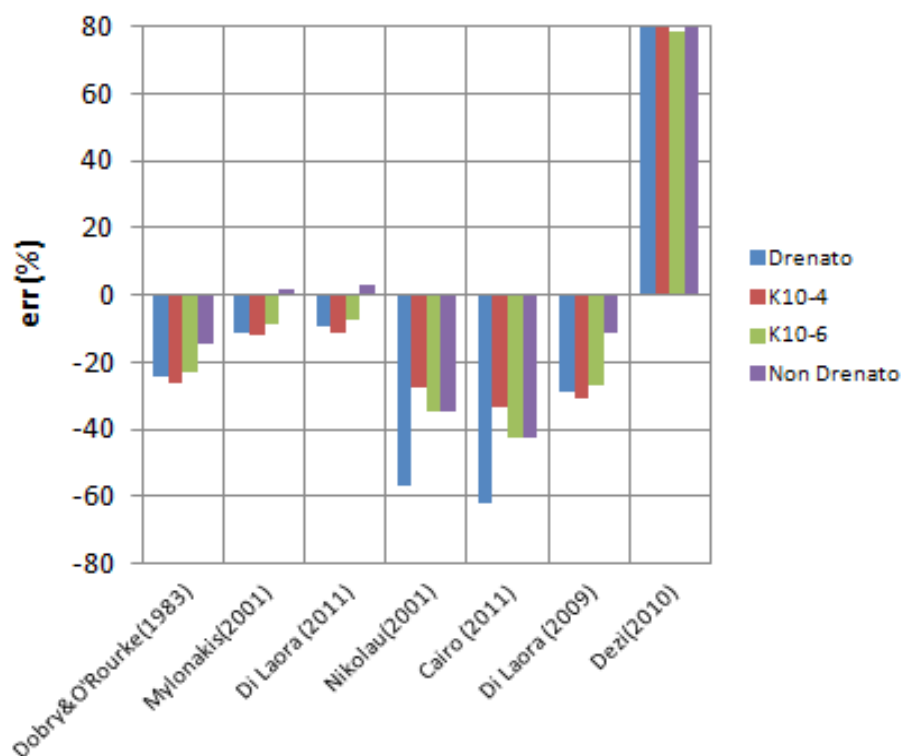


Figura 8.3.3: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Tolmezzo e  $Dr=55\%$ .

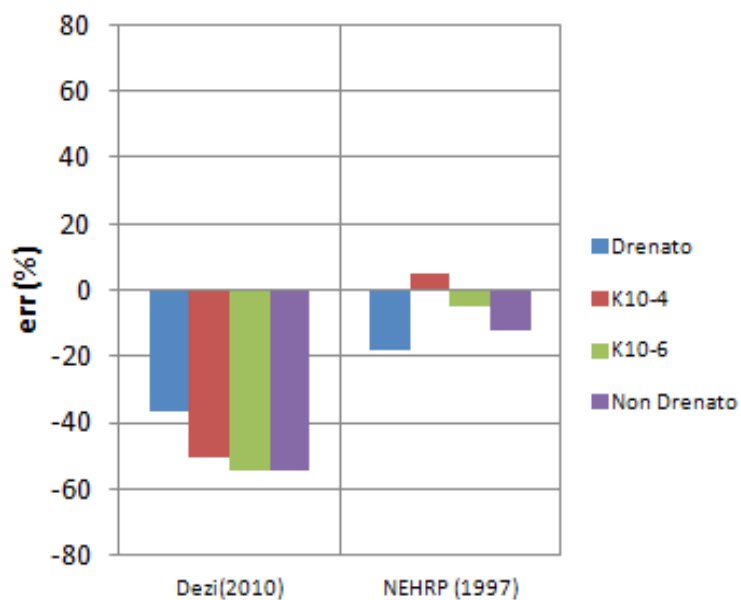


Figura 8.3.4: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Tolmezzo e  $Dr=55\%$ .

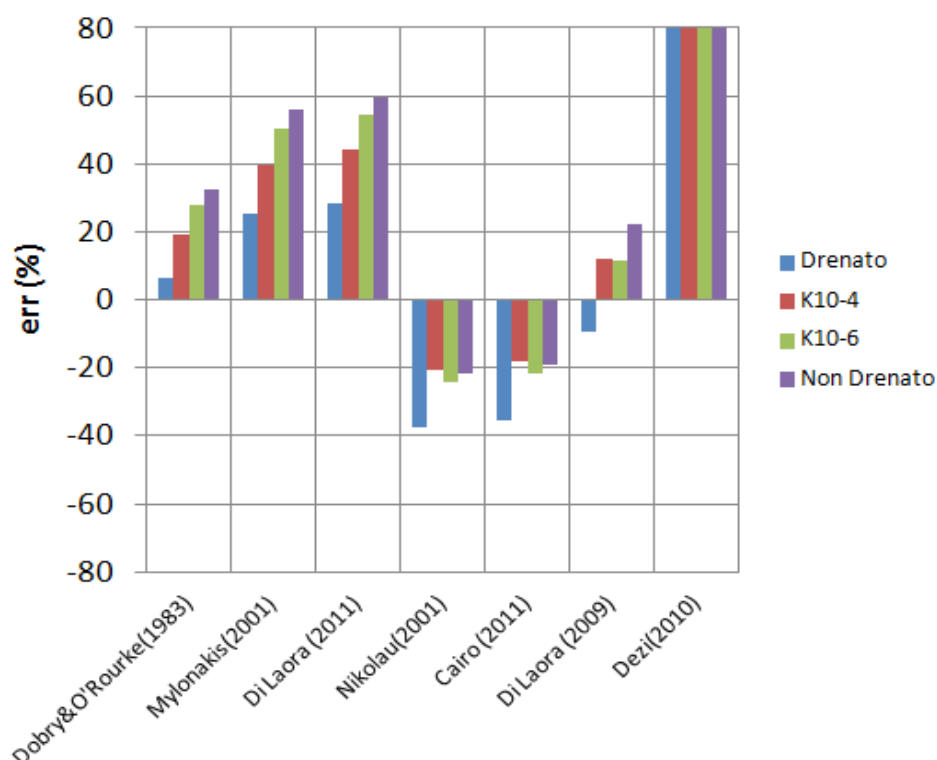


Figura 8.3.5: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Sturno e  $Dr=85\%$ .

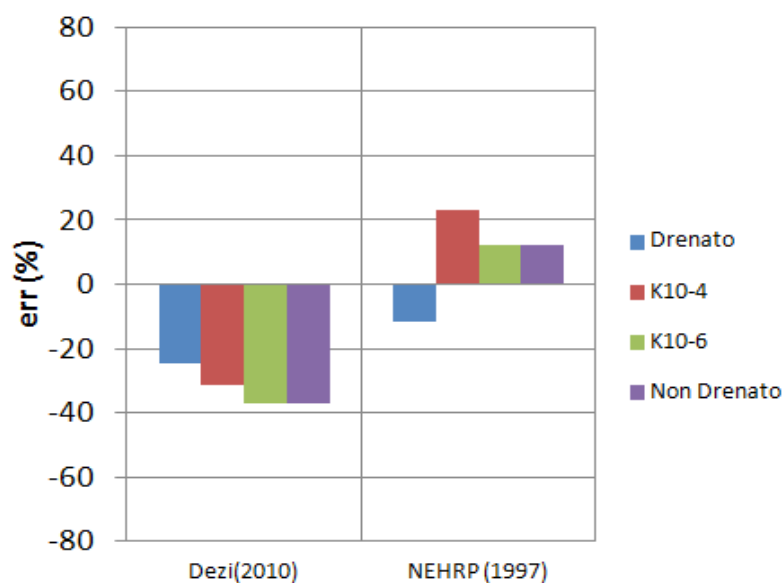


Figura 8.3.6: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Sturno e  $Dr=85\%$ .

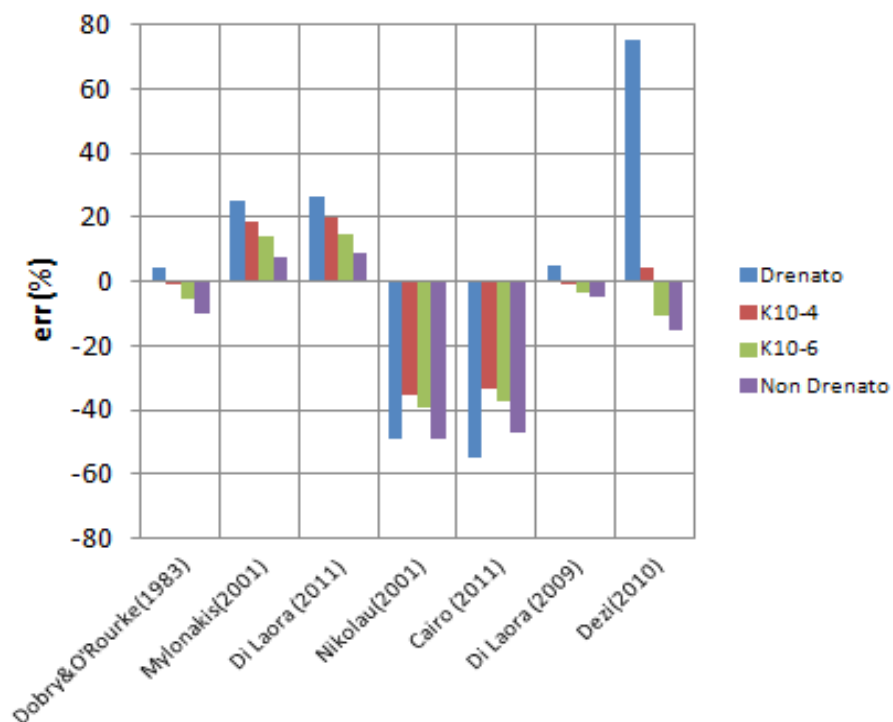


Figura 8.3.7: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Sturno e  $Dr=55\%$ .

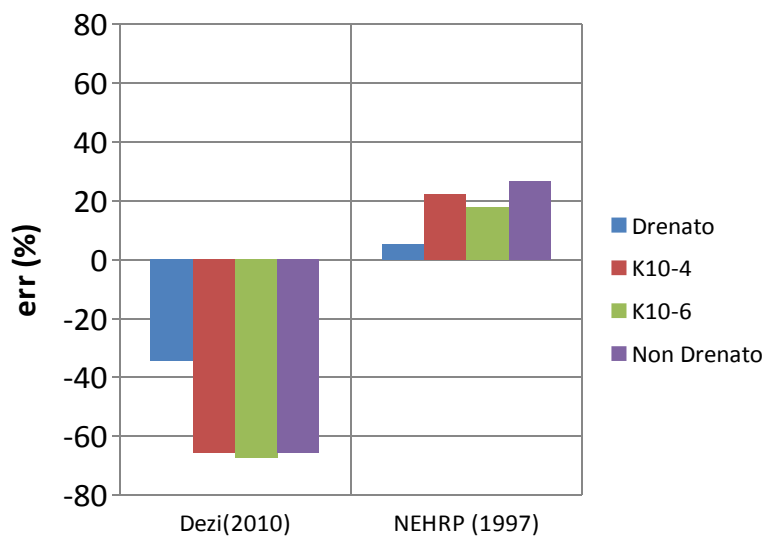


Figura 8.3.8: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Sturno e  $Dr=55\%$ .



### 8.3.1.3 Alcuni aspetti sui dati di ingresso per le sollecitazioni al contatto stratigrafico

Solamente per l'evento sismico di Tolmezzo, la determinazione dei parametri di ingresso da analisi di risposta sismica locale (con il modello DM) ha consentito ai metodi di *Di Laora et al. (2011)* e *Mylonakis (2001)* di fornire stime delle sollecitazioni all'interfaccia sufficientemente accurate. I parametri ottenuti a seguito dell'evento sismico di Sturno, invece, hanno indotto previsioni eccessivamente cautelative.

Questi due metodi correlano le deformazioni  $\epsilon_p$  che il palo subisce a seguito dell'interazione, con quelle di campo libero  $\gamma_1$ , entrambe al contatto stratigrafico. Per questa ragione, il momento massimo atteso si verifica sempre a seguito della massima deformazione  $\gamma_1$  ricavata in condizioni di campo libero.

Rappresentando per l'evento sismico di Tolmezzo, le storie temporali della  $\epsilon_p$  e della  $\gamma_1$  in corrispondenza del contatto tra i due strati è stato possibile confermare questo comportamento, verificando la contemporaneità tra deformazione massima nel palo e nel terreno (Figura 8.3.9 e 8.3.10). Per l'evento sismico di Sturno, invece, tale contemporaneità non è stata rispettata a causa dell'elevato numero di cicli e della Durata Significativa molto prolungata dell'evento sismico (Figura 8.3.11 e 8.3.12).

Per questa ragione, è stata determinata a scopo illustrativo la deformazione  $\gamma_1$  in corrispondenza dell'istante temporale in cui si verifica il massimo momento flettente e successivamente sono state ricalcolate le sollecitazioni nel palo con i metodi di *Di Laora et al. (2011)* e *Mylonakis (2001)*. In figura 8.3.13 e 8.3.14 è possibile osservare che gli errori relativi sono sensibilmente ridotti, soprattutto per il caso di densità relativa elevata dello strato superiore ( $D_r=85\%$ ).

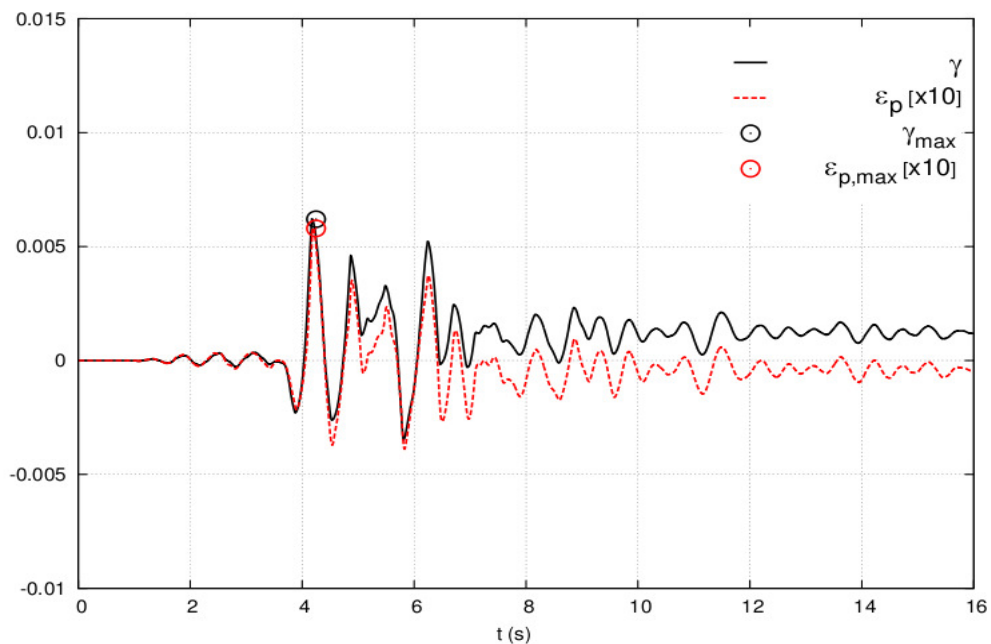


Figura 8.3.9: Storia temporale della deformazione di taglio nello strato superiore, in corrispondenza del contatto stratigrafico e la deformazione del palo  $\epsilon_p$ . Evento sismico di Tolmezzo,  $Dr=85\%$ , Analisi di consolidazione - permeabilità  $K=10^{-4}$  m/s.

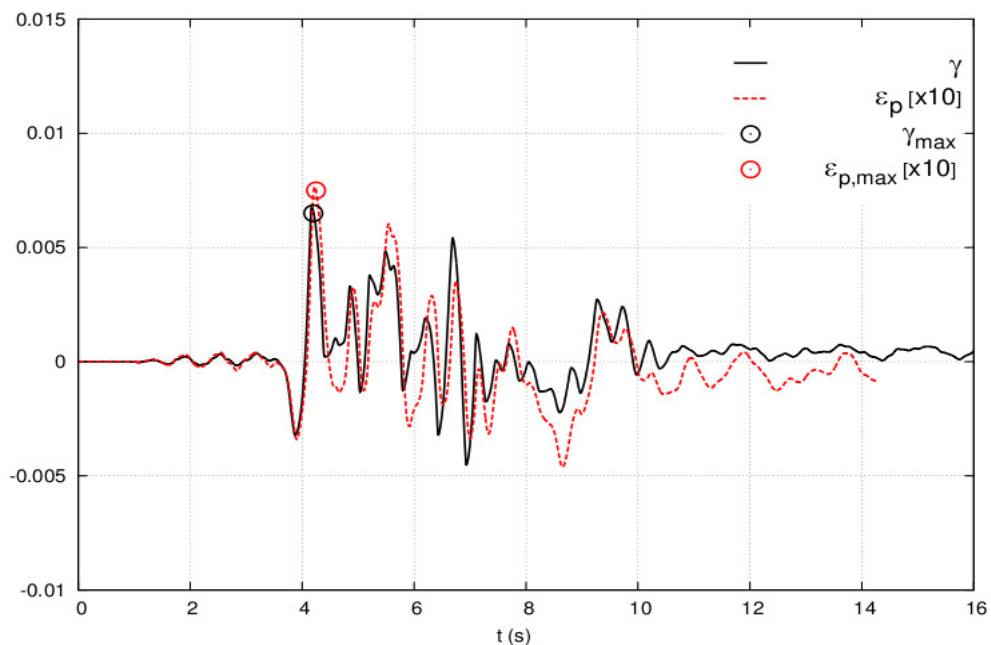


Figura 8.3.10: Storia temporale della deformazione di taglio nello strato superiore, in corrispondenza del contatto stratigrafico e la deformazione del palo  $\epsilon_p$ . Evento sismico di Tolmezzo,  $Dr=55\%$ , Analisi di consolidazione - permeabilità  $K=10^{-4}$  m/s.

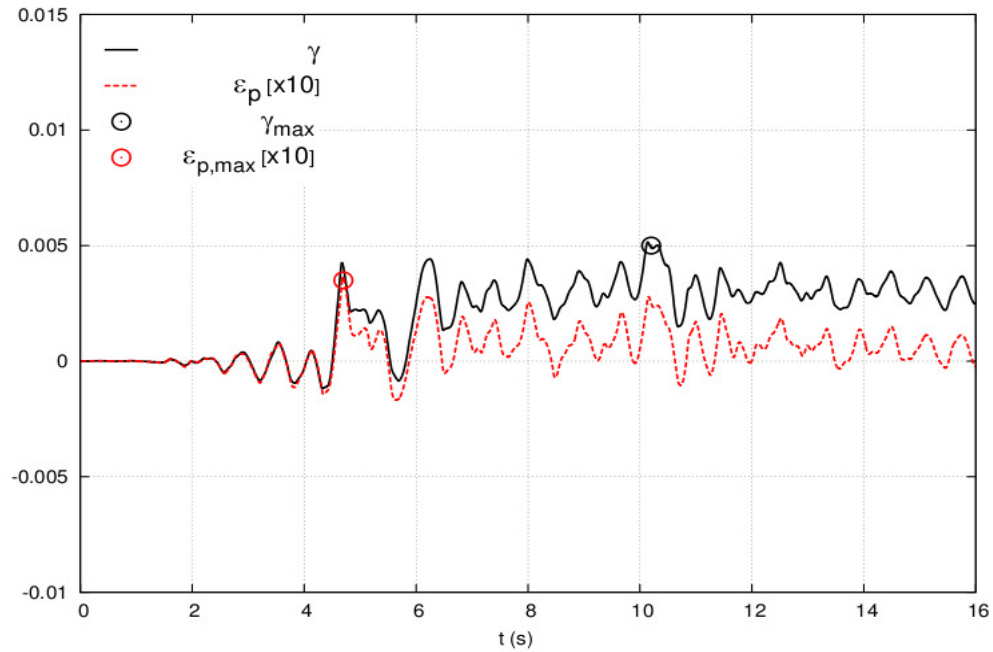


Figura 8.3.11: Storia temporale della deformazione di taglio nello strato superiore, in corrispondenza del contatto stratigrafico e la deformazione del palo  $\epsilon_p$ .  
Evento sismico di Sturno,  $Dr=85\%$ , Analisi drenata.

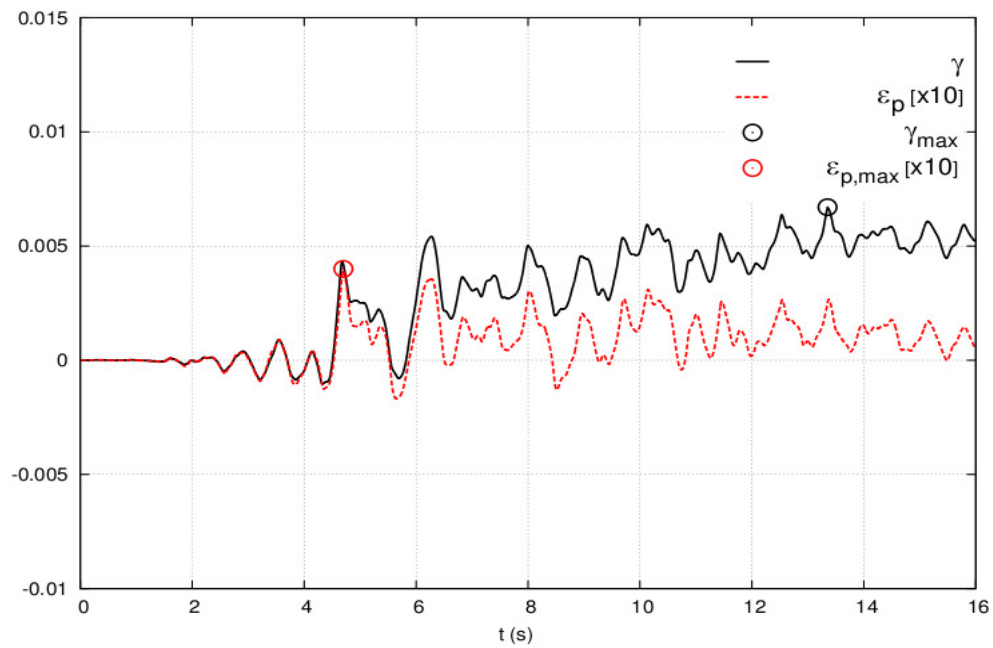


Figura 8.3.12: Storia temporale della deformazione di taglio nello strato superiore, in corrispondenza del contatto stratigrafico e la deformazione del palo  $\epsilon_p$ .  
Evento sismico di Sturno,  $Dr=85\%$ , Analisi di consolidazione - permeabilità  $K=10^{-4}$  m/s.

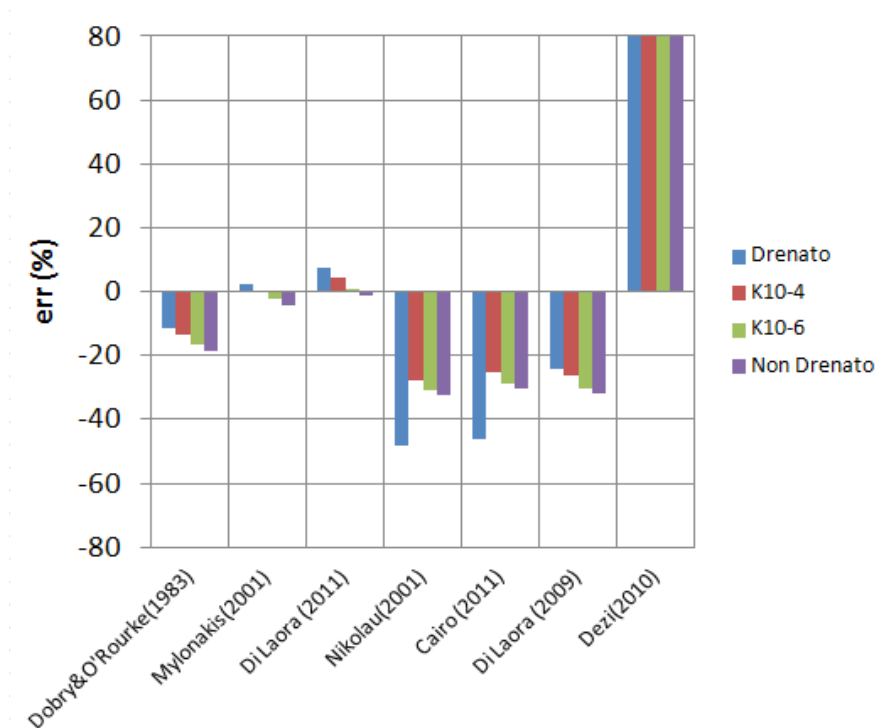


Figura 8.3.13: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato. Determinazione del momento "corretto" in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Sturno e  $D_r=85\%$ .

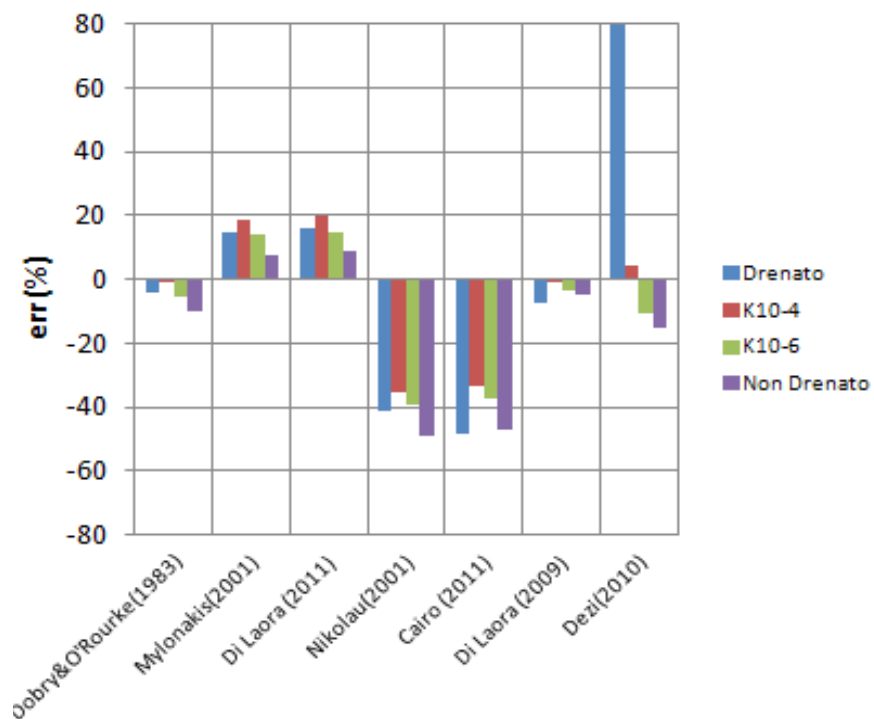


Figura 8.3.14: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato. Determinazione del momento "corretto" in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Sturno e  $D_r=55\%$ .

### 8.3.2 Confronto variando i dati di ingresso

In questa seconda fase è stata analizzata la variabilità della soluzione fornita da ciascun metodo, cambiando progressivamente l'accuratezza dei dati di ingresso. I confronti hanno riguardato i risultati relativi sia alle analisi drenate, nelle quali il ruolo delle sovrappressioni interstiziali ( $\Delta u$ ) è assente, sia quelle di consolidazione con permeabilità pari a  $10^{-6}$  m/s, nelle quali il loro contributo è particolarmente importante.

Dall'esame dei risultati, è possibile affermare che nella maggior parte dei casi le stime delle sollecitazioni massime sono più accurate se si utilizzano come valori dei dati di ingresso quelli ricavati con il modello DM (da Figura 8.3.15 a Figura 8.3.30). Questa affermazione è sicuramente valida per quanto riguarda le sollecitazioni in corrispondenza della testa del palo, dove l'uso dell'accelerazione massima ottenuta direttamente da analisi accurate risulta sempre più adeguata.

Se si esaminano le sollecitazioni massime in corrispondenza della sezione di interfaccia, questa considerazione non sempre è valida. Come è ben noto, non tutti i dati di ingresso possono essere ricavati direttamente dai risultati delle analisi. In alcuni casi questi dati possono essere ottenuti indirettamente sulla base di alcune ipotesi (come per esempio il modulo elastico equivalente del terreno) oppure stabiliti a priori (come il numero di cicli equivalente al sisma). Di conseguenza, anche calibrando i dati di ingresso sulla base di analisi rigorose, permane comunque un certo grado di approssimazione.

I metodi di *Mylonakis (2001)* e di *Di Laora et al. (2011)*, per esempio, dipendono da alcuni parametri quali il contrasto di rigidezza tra gli strati, la rigidezza dello strato superiore e il valore della deformazione di taglio massima. Quest'ultimo è ricavato direttamente dai risultati di analisi con il modello accurato DM ma le rigidezze dei due strati devono essere dedotte in modo indiretto a partire dalle curve di decadimento e dalla deformazione  $\gamma_{max}$ . I due metodi tuttavia risultano i più efficaci poiché l'errore introdotto dalla determinazione del valore assoluto della rigidezza ha una influenza molto modesta, trovandosi nelle due espressioni sotto la radice quarta.

I metodi di *Nikolaou et al. (2001)* e *Cairo et al. (2011)*, invece, oltre a dipendere linearmente dall'accelerazione in superficie, sono influenzati in modo più marcato dal modulo elastico equivalente dello strato superiore, poiché esso risulta elevato a 0.65.

La riduzione delle incertezze non sempre è accompagnata da un migliore accordo tra risultati e previsioni. Anche se a dati poco accurati è associata una elevata incertezza, è possibile che nella

valutazione delle sollecitazioni a livello complessivo si verifichi una sorta di compensazione. La sovrastima di un parametro può equilibrare la sottostima di un altro.

Facendo riferimento alla stratigrafia con materiale denso ( $D_r=85\%$ ) e in condizioni drenate (Figura 8.3.19), è possibile notare che la previsione del metodo di *Di Laora et al.(2011)*, calibrato sui risultati dell'analisi elastica lineare, risulta molto più accurata di quella ottenuta dall'analisi lineare equivalente. Il metodo dipende da tre parametri ( $\gamma_1, E_1, G_2/G_1$ ), oltre a quelli che derivano dalle caratteristiche geometriche del problema e dalle proprietà elastiche del palo. Il momento, così calcolato, aumenta al crescere di tutti e tre i parametri, che però in generale sono legati tra loro. All'aumentare della deformazione di taglio, infatti, il contrasto di rigidità può accentuarsi (in relazione alla forma delle curve di decadimento) ma il modulo elastico equivalente dello strato superiore certamente diminuisce. Per questa ragione, se si ignora la dipendenza dei moduli elastici dalla deformazione e si utilizzano invece i valori iniziali a piccole deformazioni, da una parte si sottostima leggermente  $G_2/G_1$  ma dall'altra si sovrastima significativamente  $E_1$ . Combinando questi due errori con la sottostima della deformazione  $\gamma_1$  ottenuta dall'analisi elastica lineare (Figura 8.2.14), si perviene ad una compensazione reciproca, cosicché la previsione fornita dal metodo in questo caso risulta molto prossima a quella “reale”. In tabella sottostante sono stati riassunti i dati di ingresso ricavati dalle tre analisi.

	$\gamma_1$	$E_1$ (kPa)	$c=(G_2/G_1)^{1/4}$	$E_p/E_1$	$M_{max}$ (KNm)
<b>EL</b>	0,0031	110095	1,34	217	817
<b>LE</b>	0,0054	30826	1,5	778	1205
<b>D&amp;M</b>	0,0043	33953	1,41	706	858

Queste considerazioni, tuttavia, possono essere valide solo nel caso in cui il contributo delle  $\Delta u$  risulti trascurabile. Se si provano a stimare le sollecitazioni con gli approcci EL e LE, in presenza di incrementi di pressioni interstiziali significativi ( $D_r=55\%$  ed evento sismico di Sturmo in Figura 8.3.29), esse risultano eccessivamente poco cautelative.

In conclusione è possibile affermare che l'uso di dati di ingresso più “realistici” migliora sicuramente l'accuratezza delle stime fornite dai metodi semplificati a condizione che tutti i dati siano ricavati in modo diretto. Nel caso in cui qualche dato sia ricavato in modo indiretto, i risultati continuano ad essere accurati a condizione che questi dati abbiano un peso poco significativo.

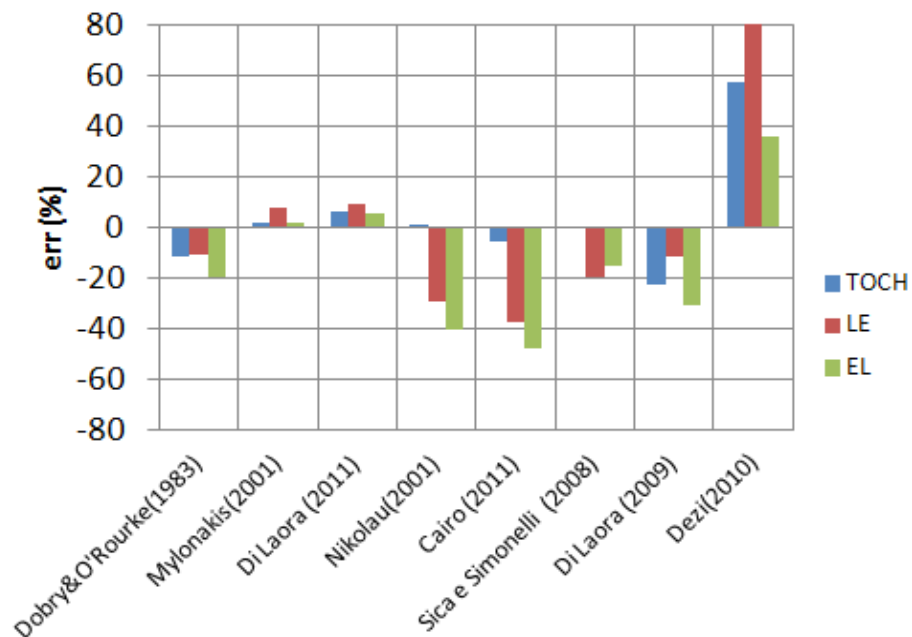


Figura 8.3.15: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Tolmezzo,  $D_r=85\%$  e analisi drenata.

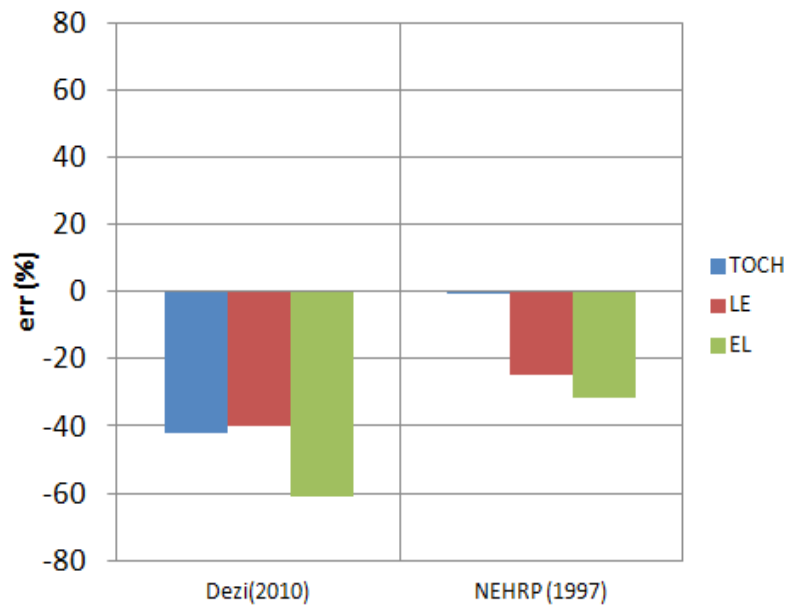


Figura 8.3.16: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Tolmezzo,  $D_r=85\%$  e analisi drenata.

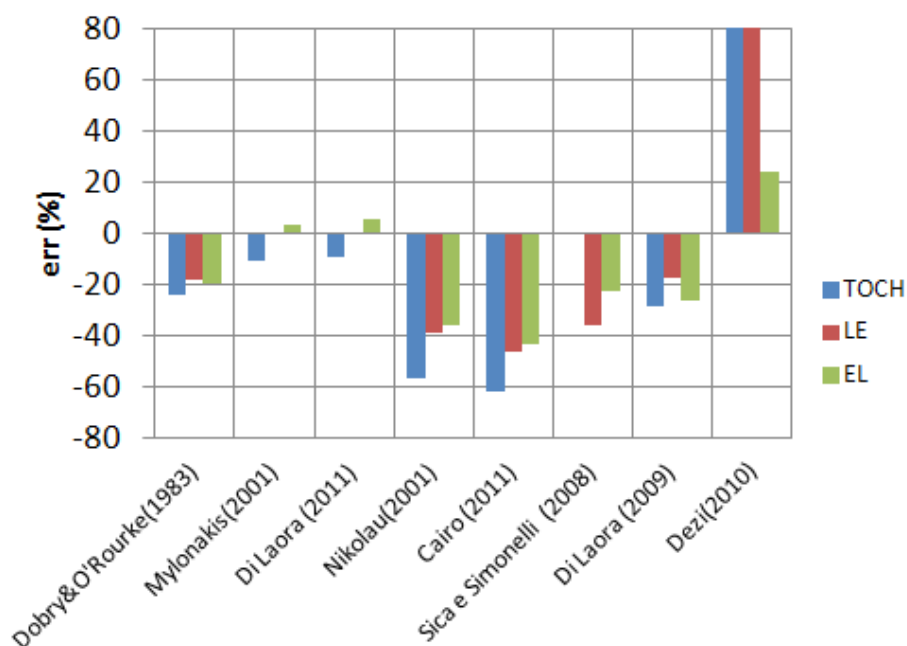


Figura 8.3.17: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Tolmezzo,  $D_r=55\%$  e analisi drenata.

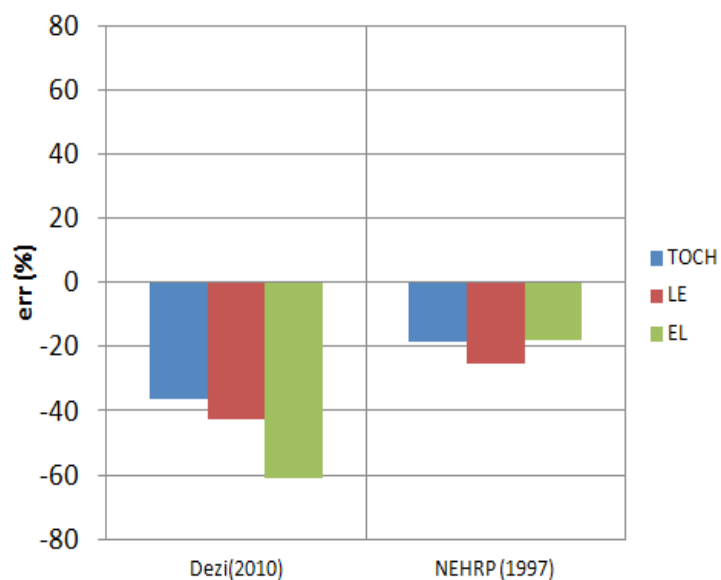


Figura 8.3.18: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Tolmezzo,  $D_r=55\%$  e analisi drenata.



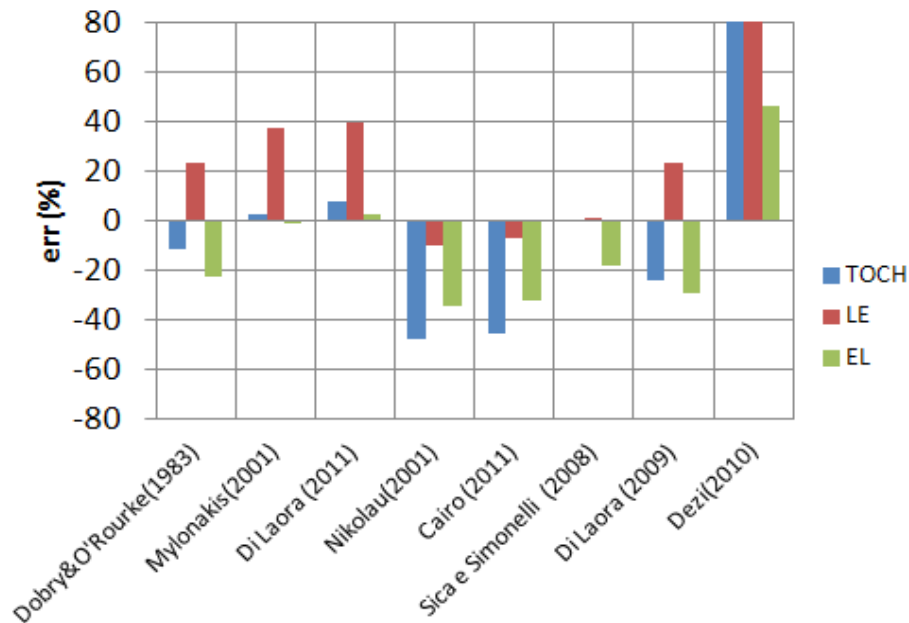


Figura 8.3.19: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Sturno,  $D_r=85\%$  e analisi drenata.

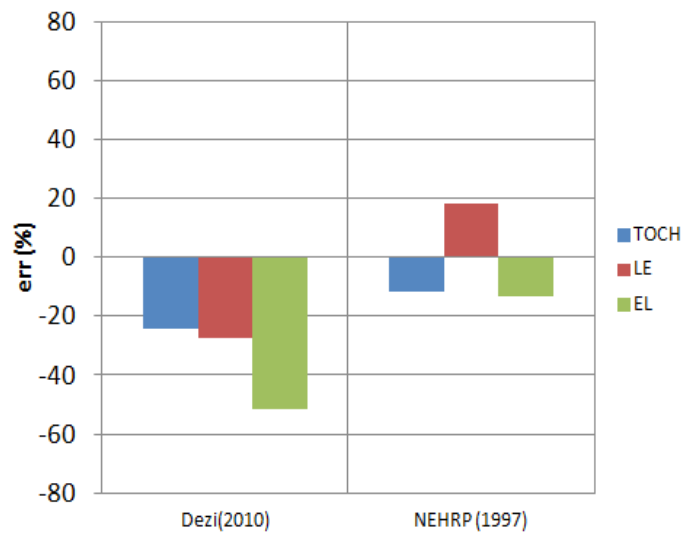


Figura 8.3.20: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Sturno,  $D_r=85\%$  e analisi drenata.

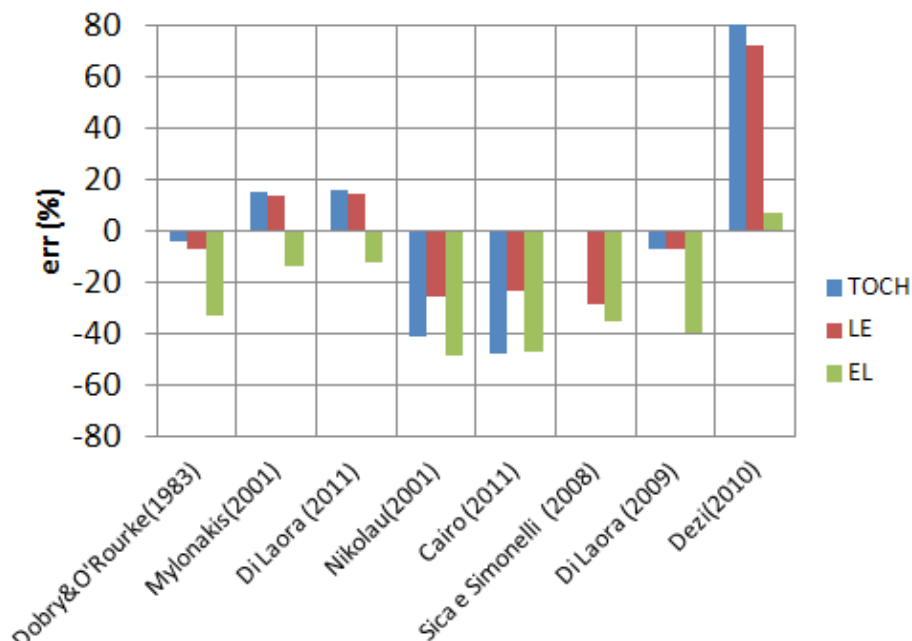


Figura 8.3.21: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Sturno,  $D_r=55\%$  e analisi drenata.

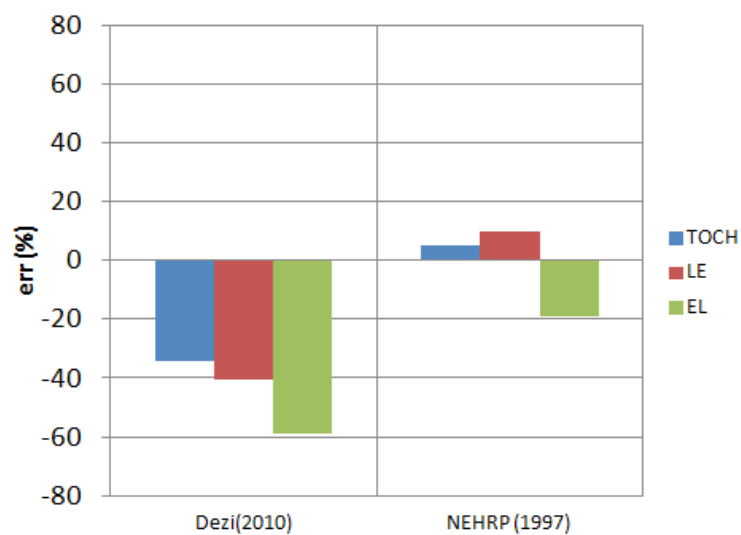


Figura 8.3.22: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Sturno,  $D_r=55\%$  e analisi drenata.

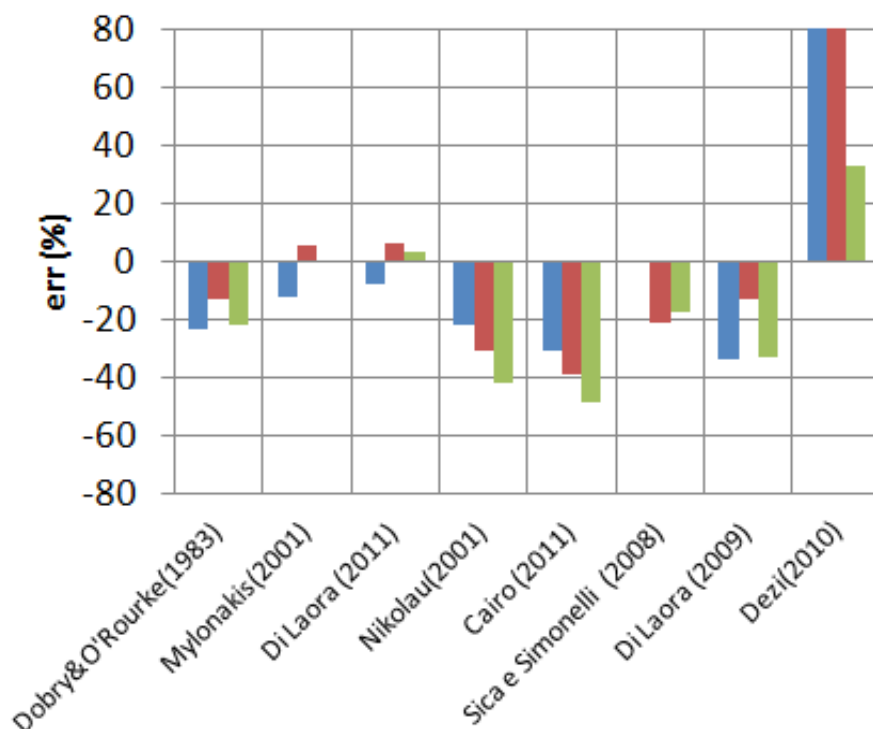


Figura 8.3.23: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Tolmezzo,  $D_r=85\%$  e analisi di consolidazione con  $K=10^{-6}$  m/s.

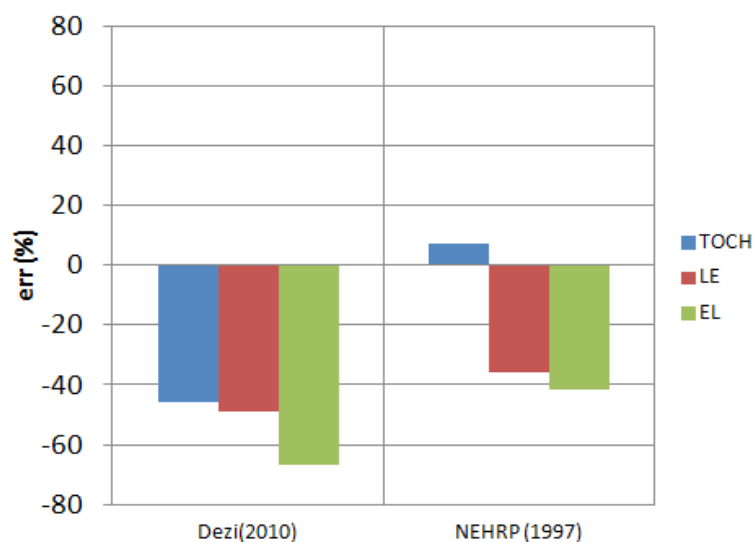


Figura 8.3.24: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Tolmezzo,  $D_r=85\%$  e analisi di consolidazione con  $K=10^{-6}$  m/s.

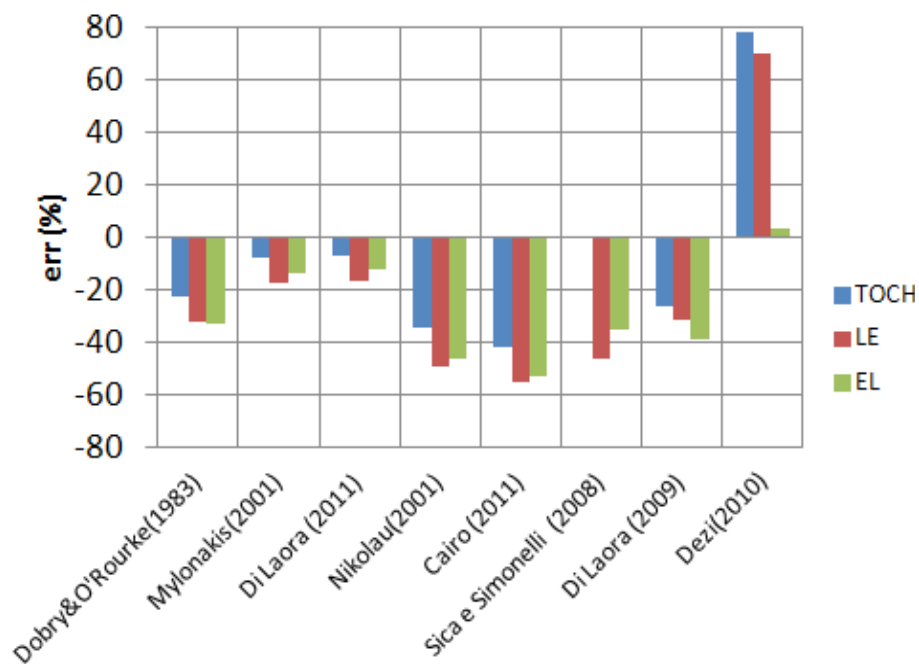


Figura 8.3.25: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Tolmezzo,  $D_r=55\%$  e analisi di consolidazione con  $K=10^{-6}\text{m/s}$ .

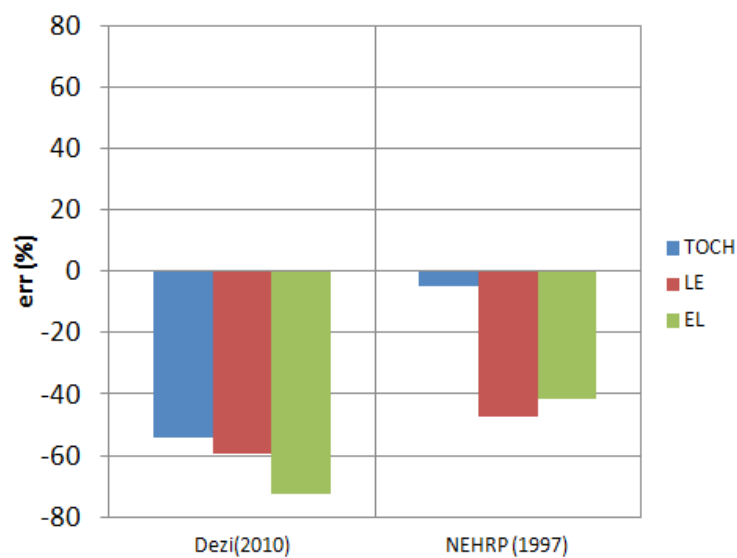


Figura 8.3.26: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Tolmezzo,  $D_r=55\%$  e analisi di consolidazione con  $K=10^{-6}\text{m/s}$ .

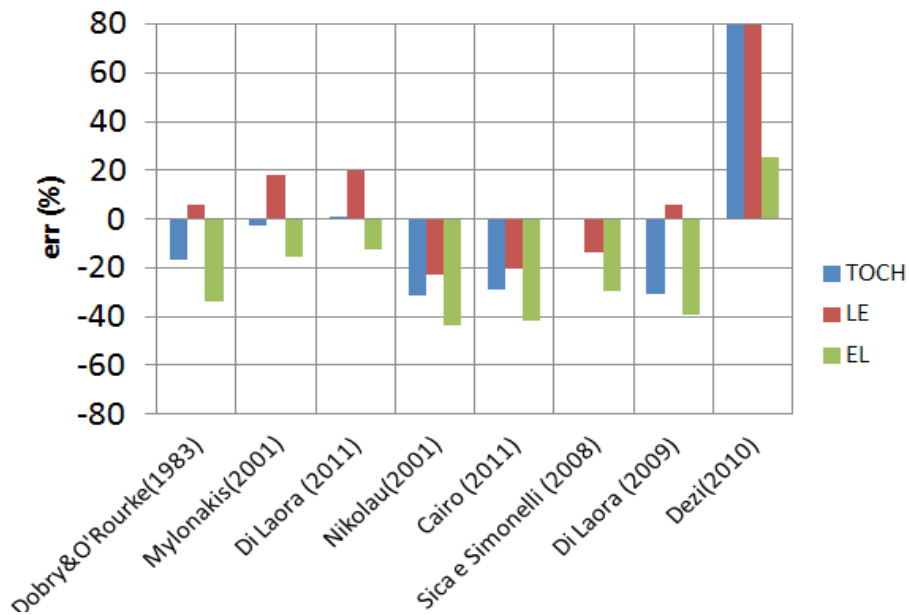


Figura 8.3.27: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Sturno,  $D_r=85\%$  e analisi di consolidazione con  $K=10^{-6}\text{m/s}$ .

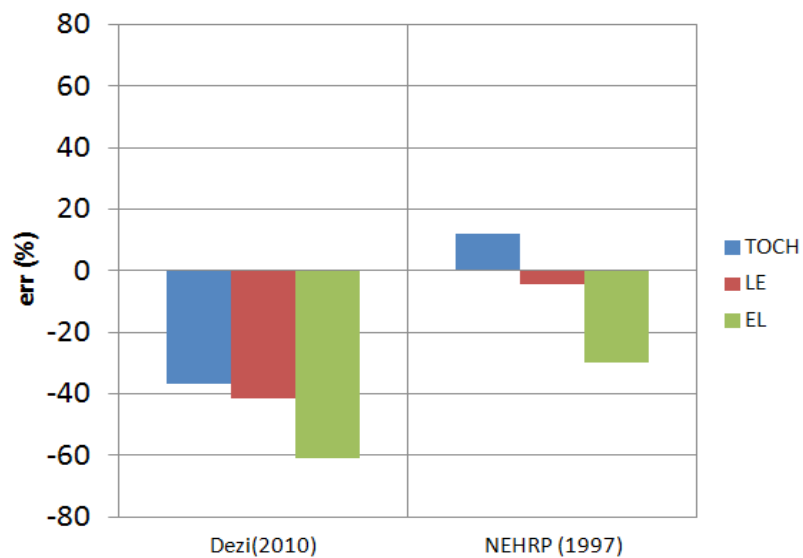


Figura 8.3.28: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Sturno,  $D_r=85\%$  e analisi di consolidazione con  $K=10^{-6}\text{m/s}$ .

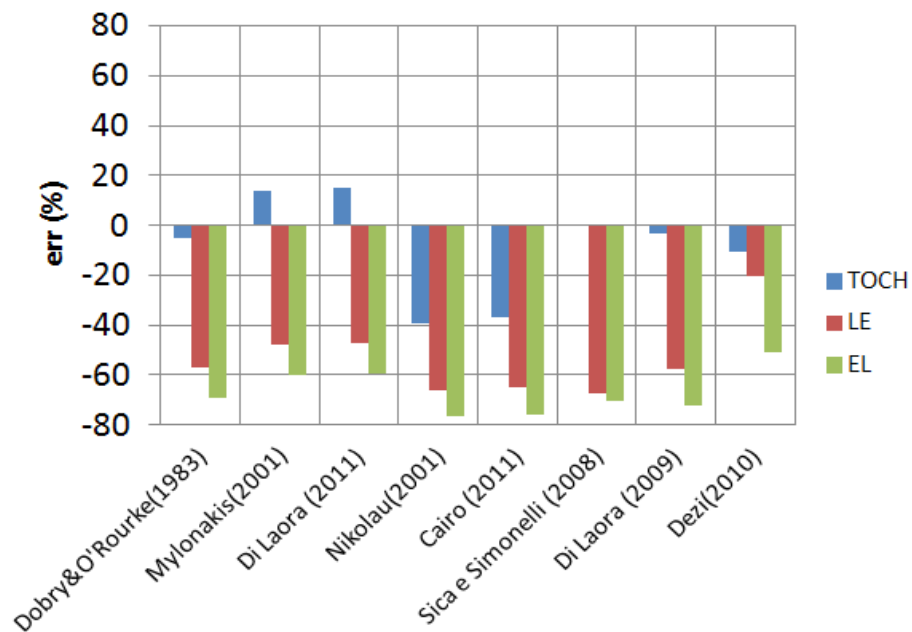


Figura 8.3.29: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza del contatto stratigrafico per l'evento sismico di Sturmo,  $D_r=55\%$  e analisi di consolidazione con  $K=10^{-6}$  m/s.

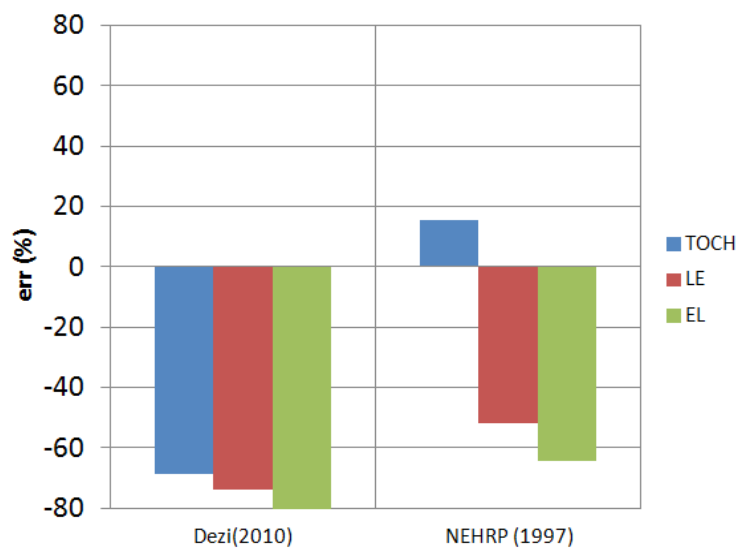


Figura 8.3.30: Errore relativo associato a ciascun metodo semplificato utilizzando differenti dati di ingresso. Determinazione del momento in corrispondenza della testa per l'evento sismico di Sturmo,  $D_r=85\%$  e analisi di consolidazione con  $K=10^{-6}$  m/s.

## Capitolo 9

# **ANALISI DI INTERAZIONE COMPLETA**

## 9.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo è stato affrontato il problema dell'interazione tra la struttura, la fondazione e il terreno. E' stato messo a punto lo studio della risposta dinamica completa di una pila da ponte avente fondazione mista costituita da una platea su pali. La geometria della pila, della fondazione e dell'impalcato sono stati scelti facendo riferimento ad una pila da ponte ferroviario. Lo studio ha messo in luce alcuni aspetti che riguardano l'interazione durante l'evento sismico, quali la risposta complessiva della struttura, i cedimenti della fondazione, le percentuali di forza verticale trasmessa direttamente al terreno dalla platea e dai pali e l'azione di filtraggio del segnale propagato alla base della pila esercitata dal sistema fondazione-terreno. Infine, data l'accuratezza del legame costitutivo e della modellazione al finito, questi risultati possono costituire un utile riferimento per successivi confronti con metodi semplificati.



## 9.2 DEFINIZIONE DEL PROBLEMA

Le caratteristiche del problema di interazione completa sono state rappresentate in figura 9.2.1.

La pila da ponte, di sezione circolare, ha le seguenti dimensioni:

- Altezza ( $H_p$ ) = 10m;
- Diametro ( $D_p$ ) = 3.5m.

Le pile del ponte sono distanti 40m e il carico per unità di lunghezza dovuto all'impalcato è pari complessivamente a 150 kN/m. E' stato ipotizzato inoltre che il sisma sia applicato in direzione trasversale rispetto alla linea d'asse della strada, cosicché l'interazione tra le pile sia trascurabile e la massa in testa alla pila ( $m$ ) corrisponda a 611 Mg circa.

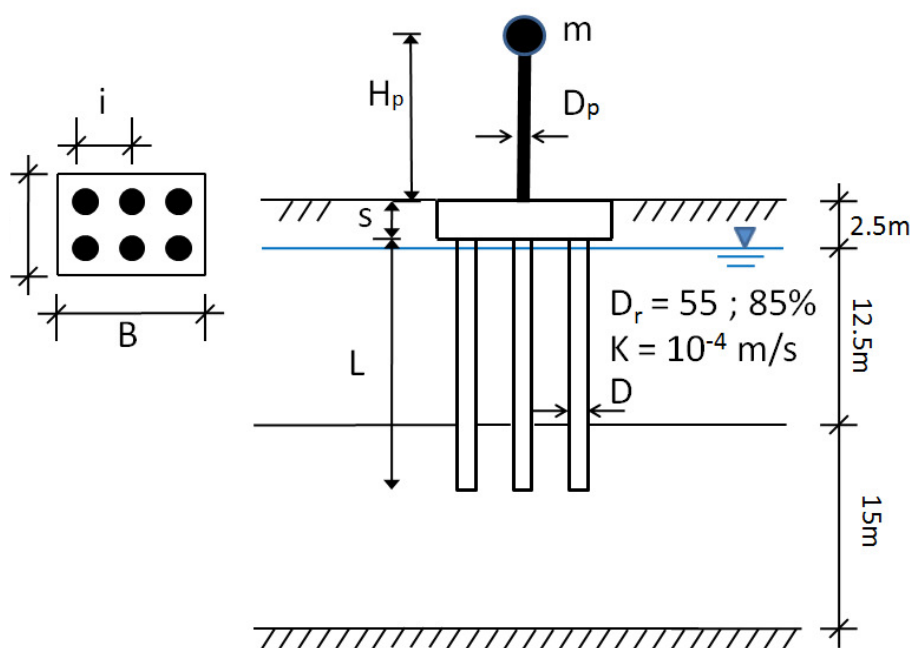


Figura 9.2.1: Definizione del problema

La fondazione è costituita da una platea su sei pali con interasse ( $i$ ) pari a 4 diametri. La larghezza ( $B$ ) in pianta della platea è 10 m, l'altezza ( $H$ ) è 6m e lo spessore ( $s$ ) è pari a 2 m. Il piano di fondazione è posizionato al di sotto del piano campagna di 2 m cosicché la lunghezza di ciascun palo ( $L$ ) è pari a 18m. Il diametro ( $D$ ) dei pali è pari a 1 m. Sia la pila, sia gli elementi che costituiscono la fondazione sono stati rappresentati con un materiale elastico lineare, con modulo costante e pari a 24 GPa,

corrispondente a quello di un calcestruzzo di classe  $R_{ck}=25$  MPa fessurato.

La stratigrafia presa in esame, come per il problema dell'interazione cinematica (Capitolo 7), è composta da due strati, ciascuno di spessore 15 m e descritti dal modello di *Dafalias & Manzari (2004)*. Lo strato superiore ha i parametri della *Toyoura Sand* (ad eccezione del coefficiente di Poisson) e l'indice dei vuoti è stato ricavato dal parametro  $\Psi$  (*Been & Jefferies, 1985*), assunto costante nello strato e sempre negativo, in modo tale da far raggiungere alla densità relativa i valori pari al 55% e all'85%. Lo strato inferiore invece è più rigido e più resistente di quello superiore poiché ha gli stessi parametri ad eccezione di  $G_0$  e  $M$ , che sono rispettivamente pari a 350 e 1.33.

Lo stato iniziale del materiale, corrispondente ad una condizione di normal-consolidazione e centrato rispetto alla superficie di snervamento, è stato applicato all'inizio di ciascuna analisi (in equilibrio con le forze agenti senza violare il criterio di resistenza) e il coefficiente di spinta a riposo è stato ricavato dalla nota relazione di *Jaky (1944)*  $K_0 = 1 - \sin(\varphi')$  ( $\varphi'$  è stato ricavato a partire da  $M$ ).

Contrariamente alle analisi di interazione cinematica, in questo caso è stata eseguita soltanto un'analisi di consolidazione con permeabilità isotropa pari a  $10^{-4}$  m/s, omogenea in tutto il terreno. L'evento sismico applicato alla base del modello è quello di Tolmezzo – Diga Ambiesta (6/5/1976) (componente WE).

Il terreno e la fondazione sono stati modellati con elementi isoparametrici a 8 nodi, mentre il palo e la pila sono costituiti da elementi tipo "truss-beam" collegati ai nodi della mesh con altri elementi (tridimensionali) tipo "truss-beam" in modo da garantire la planarità di ciascuna sezione. La massa del palo è stata assegnata ad elementi isoparametrici a 8 nodi, il cui comportamento è descritto da un modello elastico lineare con rigidità molto bassa. La massa in testa alla pila, invece, è stata assegnata direttamente su una porzione dell'elemento "truss-beam", come massa per unità di lunghezza.

Al posto di inserire elementi di interfaccia lungo la superficie laterale del palo, è stata realizzata una corona circolare di spessore limitato, costituita da elementi isoparametrici aventi le stesse caratteristiche meccaniche del terreno.

Infine, per la simmetria del problema, lo studio è stato limitato solamente a metà struttura costituita da una fondazione su 3 pali, rappresentata in Figura 9.2.2 e 9.2.3. Proprio per questa ragione, nella descrizione del comportamento dei pali è stato fatto riferimento a quello di sinistra, quello centrale e quello di destra, ben individuabili in figura.

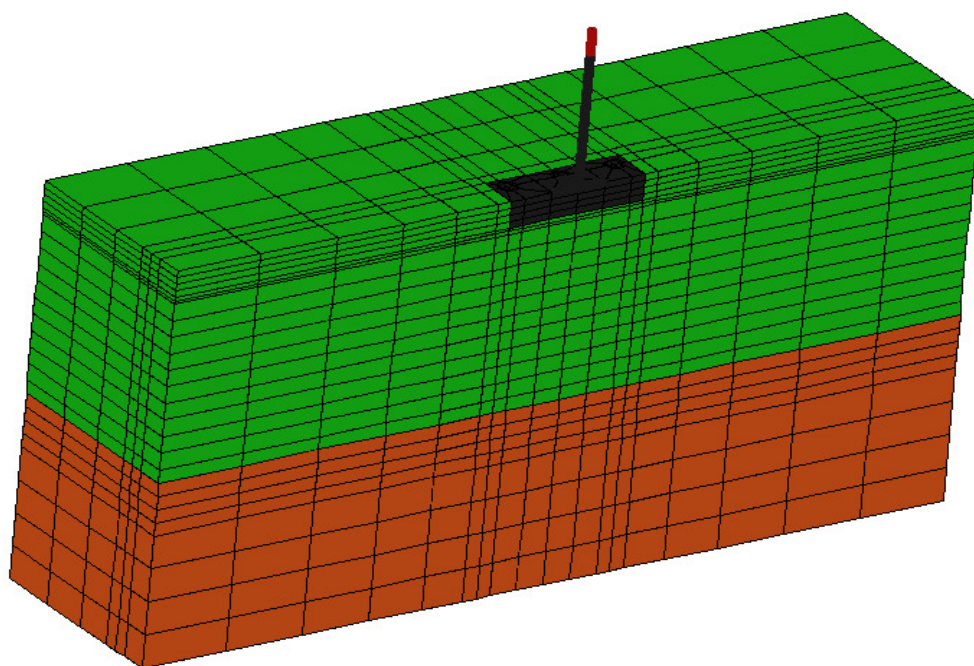


Figura 9.2.2: Mesh utilizzata per lo studio dell'interazione completa.

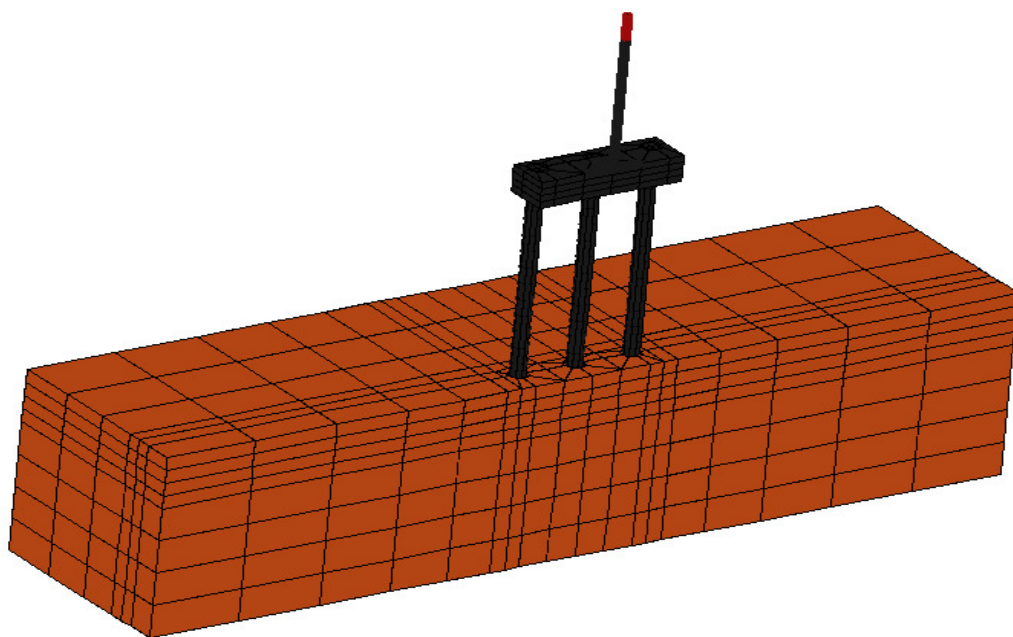


Figura 9.2.3: Particolare della mesh. Vista dei tre pali senza lo strato superiore di terreno.

### 9.3 ANALISI PRELIMINARE

Come è noto le azioni che la struttura in elevazione subisce a seguito dell'evento sismico sono in genere dovute alla complessa interazione con il terreno e con la struttura di fondazione.

In realtà, in questa fase preliminare, il problema è stato trattato in maniera semplificata, considerando la pila inizialmente incastrata alla base per poi tenere solo successivamente in conto, seppur in maniera approssimata, anche della cedevolezza della fondazione. In tutti i casi, comunque, è stata ipotizzata l'assenza di modifica del segnale di campo libero per effetto della fondazione.

La struttura in elevazione può essere approssimata ad un oscillatore elementare. Il suo periodo proprio può essere calcolato con la formula (9.3.1) e assume il valore 0.23s:

$$\frac{2\pi}{T_{0,fix}} = \omega_0 = \sqrt{\frac{K_s}{M}} \quad (9.3.1)$$

La massa complessiva in testa alla pila è pari alla somma della massa dell'impalcato e di metà della massa della pila stessa, avendo ipotizzato per semplicità che la massa della pila sia concentrata agli estremi.

Se la base della pila è incastrata, la rigidezza può essere calcolata con la teoria della linea elastica di Bernoulli.

$$K_s = \frac{3EI}{L^3} \quad (9.3.2)$$

Se invece si tiene in conto della cedevolezza della fondazione, sarebbe necessario considerare diversi aspetti. Prima di tutto il sistema non è più ad un grado di libertà ma ne ha tre (come illustrato in Figura 9.3.1): lo spostamento relativo rispetto alla fondazione ( $u_0$ ), lo spostamento relativo tra la fondazione e il moto di campo libero ( $u_0$ ) e la rotazione della fondazione ( $\theta$ ). Inoltre sarebbe opportuno considerare anche la massa della platea che, con la sua inerzia (traslazionale e rotazionale), influenza la risposta complessiva del sistema. Tuttavia se essa è sufficientemente concentrata, il contributo rotazionale può essere trascurato; inoltre se la platea è immersa nel terreno e le sue dimensioni non sono

particolarmente importanti, la massa della fondazione può essere ugualmente trascurata.

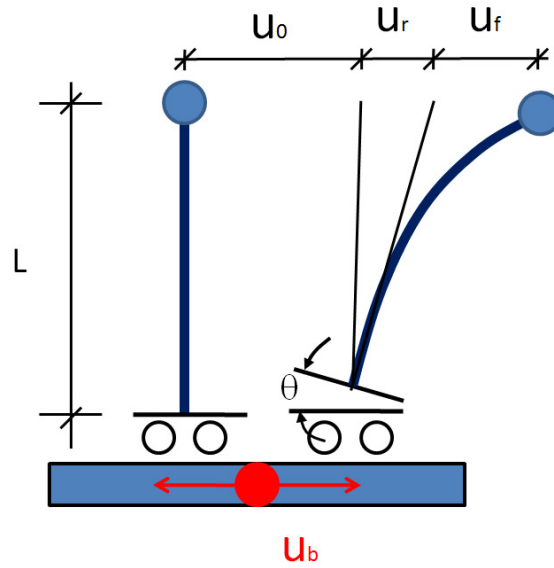


Figura 9.3.1: Oscillatore semplice.

Con queste due ipotesi, il sistema risulta dotato di una sola massa, quindi di una frequenza propria di vibrazione e di un modo di vibrare. Il periodo proprio di vibrazione può essere calcolato tramite la relazione:

$$\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{T_{0,int}} = \sqrt{\frac{\tilde{K}}{M}} \quad \tilde{K} = \frac{1}{\frac{1}{K_s} + \frac{1}{\bar{K}_{f,h}} + \frac{1}{\bar{K}_{f,r}}} \quad (9.3.3)$$

$K_s$  è la rigidezza della struttura a base incastrata;  $\bar{K}_{f,h}$  è la rigidezza della fondazione in direzione trasversale mentre  $\bar{K}_{f,r}$  è quella dovuta alla rotazione. Le due rigidezze dipendono in generale, non solo dalla rigidezza statica, dallo smorzamento del terreno e dalla deformazione indotta ma anche dalla frequenza di eccitazione. Per questa ragione la stima della pulsazione equivalente del sistema necessita di un procedimento iterativo.

Insieme alla rigidezza equivalente del sistema e al suo periodo proprio è possibile determinare lo smorzamento equivalente, che può essere calcolato:

$$\tilde{\xi} = \left( \frac{\tilde{\omega}}{\omega} \right)^3 \cdot \xi + \tilde{\xi}_0 \quad (9.3.4)$$

$$\tilde{\xi}_0 = \frac{1}{2} \tilde{\omega}^3 M \left( \frac{c_{f,h}}{\bar{K}_{f,h}^2} + \frac{c_{f,r}}{\bar{K}_{f,r}^2} \right) \quad (9.3.5).$$

Lo smorzamento  $\xi$  è quello della struttura in elevazione mentre  $\xi_0$  è quello dovuto all'interazione tra la fondazione e il terreno che dipende dalle rigidezze e dalla viscosità, anch'essa dipendente dalla frequenza.

In linea di principio sarebbe possibile calcolare la risposta del sistema, determinando le rigidezze e le viscosità trasversali e rotazionali della fondazione. Tuttavia, è proprio la loro stima ad essere poco accurata nel caso in esame. Se da un lato l'impedenza di ciascun palo può essere ricavata con qualche incertezza dalle relazioni di *Gazetas (1991)*, dall'altro è particolarmente difficile portare in conto contemporaneamente l'effetto di gruppo, la sua interazione con la platea e l'interazione tra quest'ultima e il terreno che la circonda.

A causa di queste evidenti difficoltà, in questo capitolo si è cercato solo di descrivere i risultati delle analisi numeriche sottolineando alcuni aspetti importanti del comportamento della struttura e della sua interazione con il terreno (accuratamente descritto).

Una valutazione preliminare e approssimata del periodo proprio della struttura può essere ottenuta considerando solamente il contributo trasversale dei pali, trascurando sia l'effetto tira-spingi (*rocking*) sia quello dovuto alla interazione tra platea e terreno.

La rigidezza statica orizzontale dei pali può essere ricavata a partire dalla relazione del palo singolo fornita da *Gazetas (1991)* valida per un sottosuolo con rigidezza che cresce con la profondità con legge parabolica.

$$K_{HH, \text{palo}} = 0.8 D \tilde{E}_s (E_p / \tilde{E}_s)^{0.28} \quad (9.3.6)$$

$$K_{f, h} = R \cdot n \cdot K_{HH, \text{palo}} \quad (9.3.7)$$

$\tilde{E}_s$  rappresenta il modulo elastico del terreno alla profondità di un diametro,  $R$  è il coefficiente riduttivo che tiene in conto l'effetto di gruppo ed  $n$  è il numero di pali.

Se si assume che la deformazione di taglio media indotta nel terreno vicino alla fondazione sia pari a 0.3%, è possibile ricavare dalle curve di decadimento (determinate nel Cap8) il coefficiente riduttivo del modulo elastico che può valere circa 0.3. Il valore di  $\tilde{E}_s$  può essere fissato pari a 15 MPa ed il coefficiente riduttivo pari ad 1 (in assenza di informazioni più dettagliate), cosicché il periodo proprio del sistema fondazione-struttura si sposta da 0.23s fino a circa 0.41s. Il valore così ottenuto deve essere considerato soltanto una stima approssimativa del valore corretto ma allo stesso tempo evidenzia il

forte contributo dell'interazione terreno struttura sulla rigidezza complessiva del sistema.

Il coefficiente di viscosità alla traslazione può essere ottenuto, allo stesso modo, dalla relazione valida per un palo isolato (*Gazetas, 1991*):

$$D_{HH} \approx 0.7\beta + 1.2 f D(E_p / \tilde{E}_s)^{0.08} \tilde{V}_s^{-1} \quad (9.3.8)$$

$$C_{HH, palo} = 2 K_{HH, palo} D_{HH} / \omega \quad (9.3.9)$$

$$c_{f, h} = n \cdot C_{HH, palo} \quad (9.3.10)$$

$\beta$  rappresenta lo smorzamento del terreno,  $f$  ed  $\omega$  sono rispettivamente la frequenza e la pulsazione di eccitazione che è ragionevole assumere pari al valore  $\tilde{f}$  ed  $\tilde{\omega}$ .

Lo smorzamento complessivo del sistema aumenta dal 5%, dovuto soltanto alla struttura in elevazione, fino a circa il 15%, avendo tenuto conto anche della cedevolezza della fondazione.

Nella Figura 9.3.2 sono stati rappresentati gli spettri di risposta in accelerazioni del segnale in ottenuto in superficie allo smorzamento del 5% e al 15%. Se la pila fosse incastrata alla base e non interagisse con il segnale di campo libero, l'accelerazione massima che subirebbe sarebbe quella descritta dall'intersezione tra spettro di risposta (ARSL – 5%) e il periodo  $T_{0,fix}$ . Se invece si considerasse la cedevolezza della fondazione, l'accelerazione massima sarebbe quella descritta dall'intersezione tra lo spettro di risposta (ARSL-15%) con il periodo  $T_{0,int}$ , purché sia lo smorzamento sia il periodo proprio del sistema siano corretti.

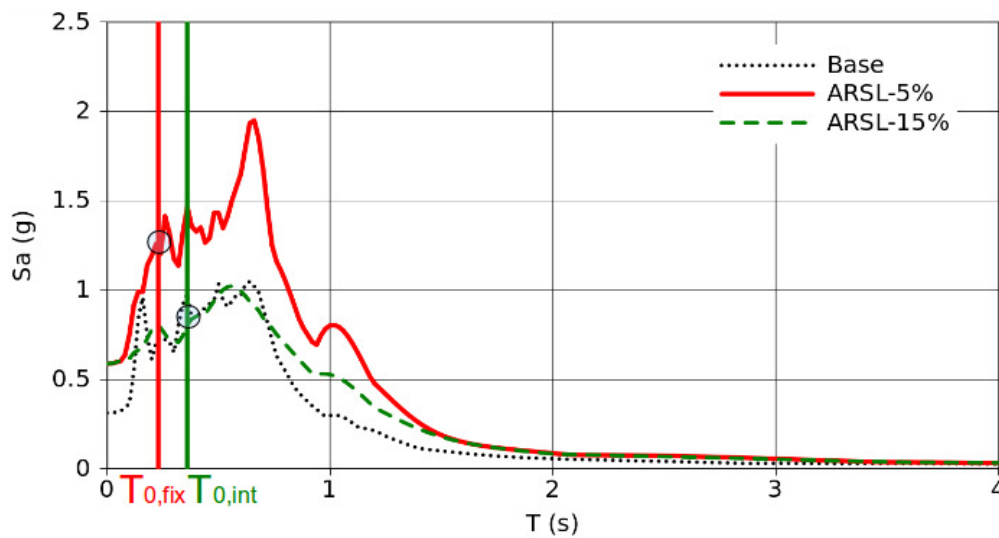


Figura 9.3.2: Confronto tra gli spettri elastici di risposta.

## 9.4 RISULTATI DELLE ANALISI

Le analisi condotte sono di diversi tipi:

- *completa* (TOT) - considera l'interazione tra tutte le componenti, terreno, fondazione e struttura in elevazione (Figura 9.4.1);
- “*cinematica*” (KIN) - considera l'interazione solamente tra la fondazione e il terreno. Il peso della struttura in elevazione è stato tenuto in conto applicando una forza concentrata sulla fondazione (Figura 9.4.2).

Inoltre, la fondazione è stata studiata sia nell'ipotesi di rotazione libera sia di rotazione impedita (“*norot*”), in modo tale da poter valutare anche il contributo del tira e spingi (*rocking*).

Lo studio ha messo in luce alcuni aspetti che riguardano l'interazione durante l'evento sismico, quali la risposta complessiva della struttura, i cedimenti della fondazione, le percentuali di forza verticale trasmessa direttamente al terreno dalla platea e dai pali ed, infine, l'azione di filtraggio del segnale propagato alla base della pila esercitata dal sistema fondazione-terreno.

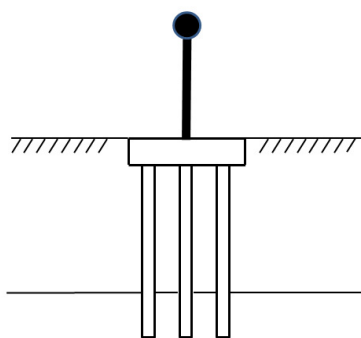


Figura 9.4.1: Analisi TOT

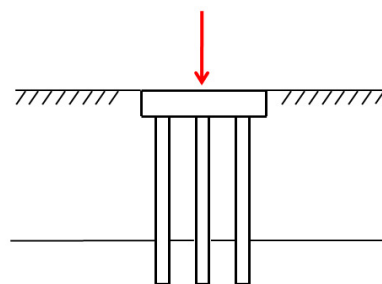


Figura 9.4.2: Analisi KIN



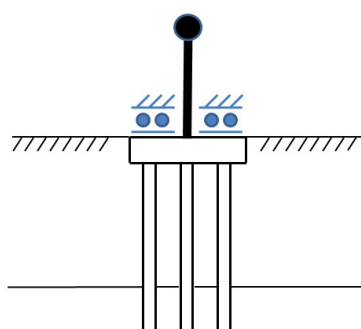


Figura 9.4.3: Analisi norot TOT

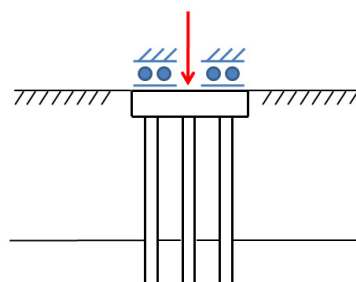


Figura 9.4.4: Analisi norot KIN

### 9.4.1 Comportamento della struttura

Dal rapporto tra lo spettro di Fourier del segnale in accelerazioni (registrato in testa alla pile) e quello in superficie nelle condizioni di campo libero è stato possibile determinare, solo in presenza di materiale addensato ( $D_r=85\%$ ), la funzione di amplificazione dovuta al complesso struttura-fondazione per il caso di platea sia libera di ruotare (*rocking*) sia vincolata alla rotazione (*norocking*) (Figura 9.4.5). A causa della forte dispersione dei dati, essi sono stati trattati con la media mobile, rappresentata dalle linee continue. E' possibile osservare che le funzioni di amplificazione manifestano un comportamento a mono frequenza del complesso struttura-fondazione, i picchi sono ben definiti e la frequenza di risonanza è unica per ciascun caso. Il periodo fondamentale del complesso struttura-fondazione in presenza di vincolo alla rotazione della base (NOROT) è minore di quello relativo al caso di platea libera, a causa della sua maggiore rigidezza.

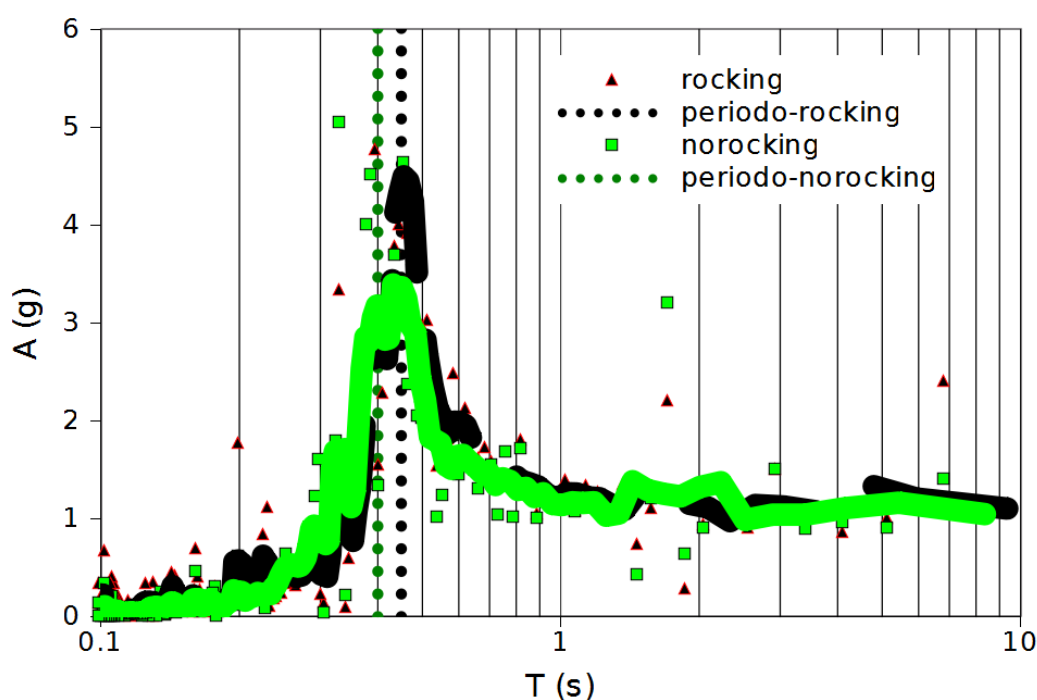


Figura 9.4.5: Rapporto tra lo spettro di Fourier in testa alla struttura e quello di *free-field* in superficie. Le linee continue rappresentano la media mobile dei dati.

### 9.4.2 Modifica del moto sismico

In Figura 9.4.6 e 9.4.6 sono stati rappresentati gli spettri di risposta in accelerazioni del segnale ottenuto alla base della pila, nelle condizioni di interazione completa e di interazione “cinematica”. Gli spettri così ottenuti sono stati confrontati con quello relativo all'accelerogramma originale applicato alla base (BASE), con quello relativo alle condizioni di campo libero (ARSL) e con quello relativo alle condizioni di rotazione impedita della fondazione (norot).

E' possibile notare dalle figure che, per periodi propri sufficientemente elevati, tutti gli spettri sono molto prossimi a quelli di campo libero. Inoltre, facendo riferimento esclusivamente alla sola interazione cinematica (KIN), è possibile notare che, per periodi bassi (quindi per strutture tozze e rigide) gli spettri di risposta forniscono azioni più basse rispetto a quelle di campo libero. Ciò può essere dovuto al fatto che le componenti ad alta frequenza del segnale che si propaga nel terreno vengono modificate dalla presenza dei pali collegati dalla platea.

In assenza di struttura in elevazione (KIN), il *rocking* della fondazione è poco apprezzabile e per questa ragione gli spettri di risposta non sono particolarmente differenti da quelli relativi al caso di rotazione impedita (norot). La presenza della struttura in elevazione, invece, accentua il *rocking* della fondazione e modifica il comportamento complessivo del sistema; tale modifica può essere apprezzata dall'esame degli spettri di risposta ed è più marcata nel caso di strato superiore denso (Figura 9.4.6).

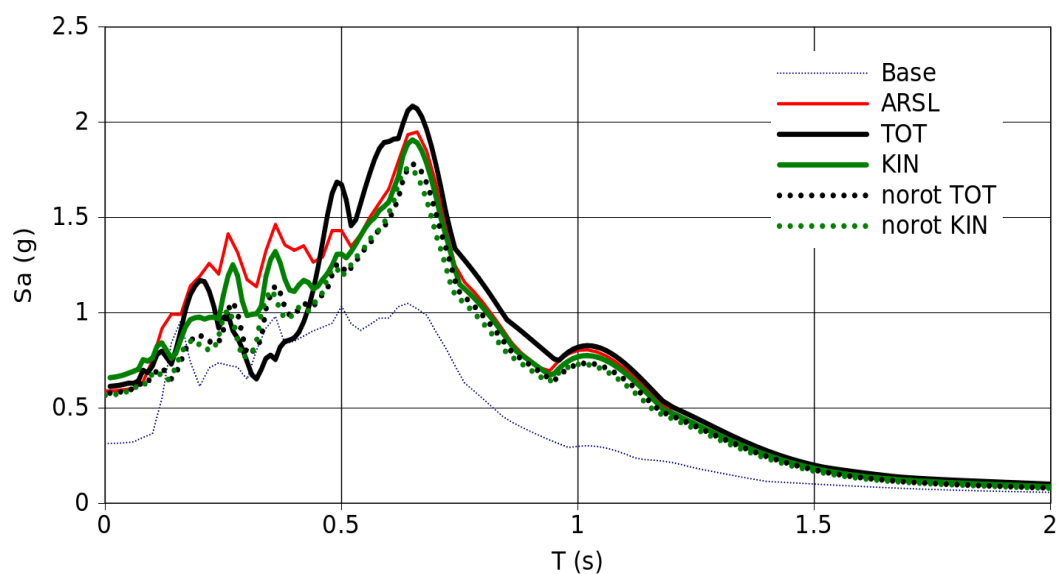


Figura 9.4.6: Confronto tra gli spettri di risposta calcolati con il 5% dello smorzamento dovuti all'interazione completa nel caso  $Dr=85\%$ .

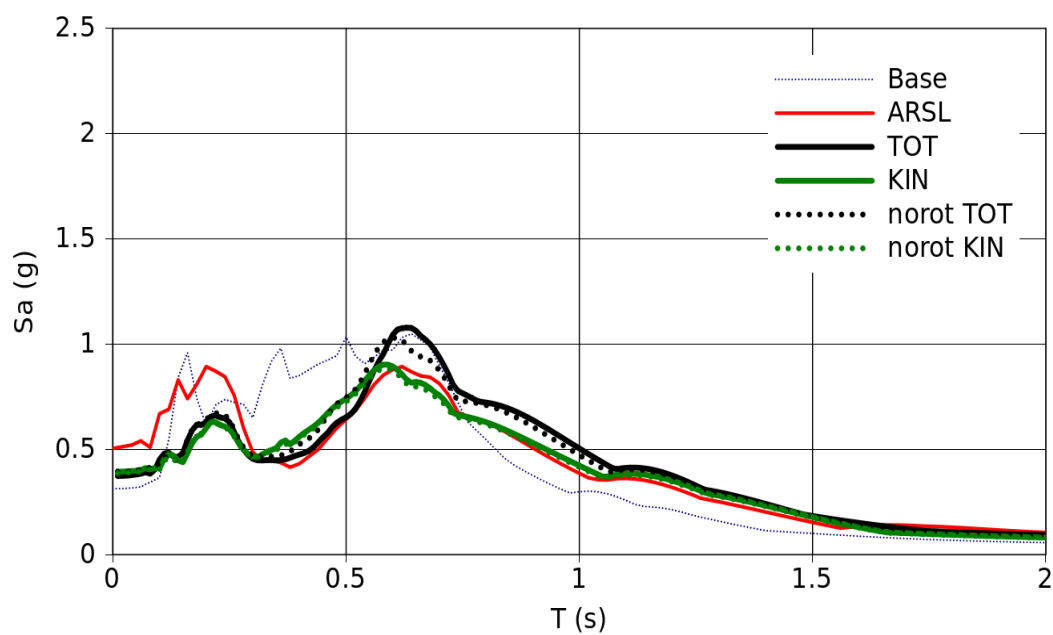


Figura 9.4.7: Confronto tra gli spettri di risposta calcolati con il 5% dello smorzamento dovuti all'interazione completa nel caso  $Dr=55\%$ .

### 9.4.3 Cedimenti dei pali

Durante l'evento sismico, la struttura di fondazione reagisce alle deformazioni imposte dal terreno circostante sollecitando i pali e la platea. Anche se la pila non è presente (KIN), vengono indotti nei pali sforzi di compressione e decompressione a cui corrisponde il *rocking* della fondazione.

In Figura 9.4.9 è stata rappresentata la storia temporale degli abbassamenti dei pali in assenza della struttura in elevazione (analisi KIN), nel caso in cui la densità relativa nello strato superiore sia 85%. Il valore non nullo iniziale è dovuto al fatto che il peso complessivo della pila e dell'impalcato è stato applicato sulla platea sotto forma di forza concentrata costante nel tempo. I cedimenti del palo di sinistra e di destra mostrano un comportamento pressoché simmetrico rispetto al palo centrale. La platea quindi ruota a seguito del moto sismico fino ad avere un cedimento differenziale pari allo 0.17‰ (in corrispondenza di 15 secondi).

Se si esamina invece il caso in cui è presente anche la struttura in elevazione (Figura 9.4.10), il *rocking* è molto più pronunciato e il cedimento differenziale finale raggiunge il valore 0.8‰.

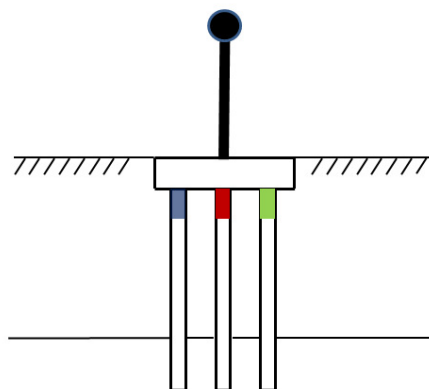


Figura 9.4.8: Colore associato a ciascun palo.

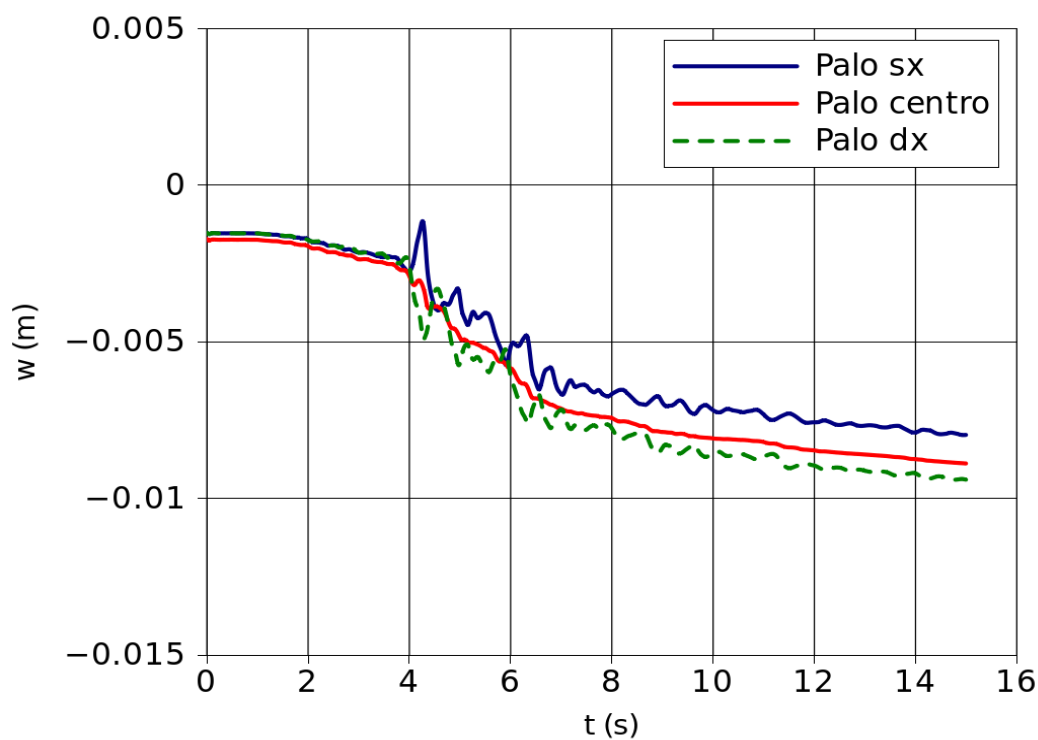


Figura 9.4.9: Spostamenti verticali dei tre pali in assenza di struttura in elevazione.  
Strato superiore con  $Dr=85\%$ . (KIN)

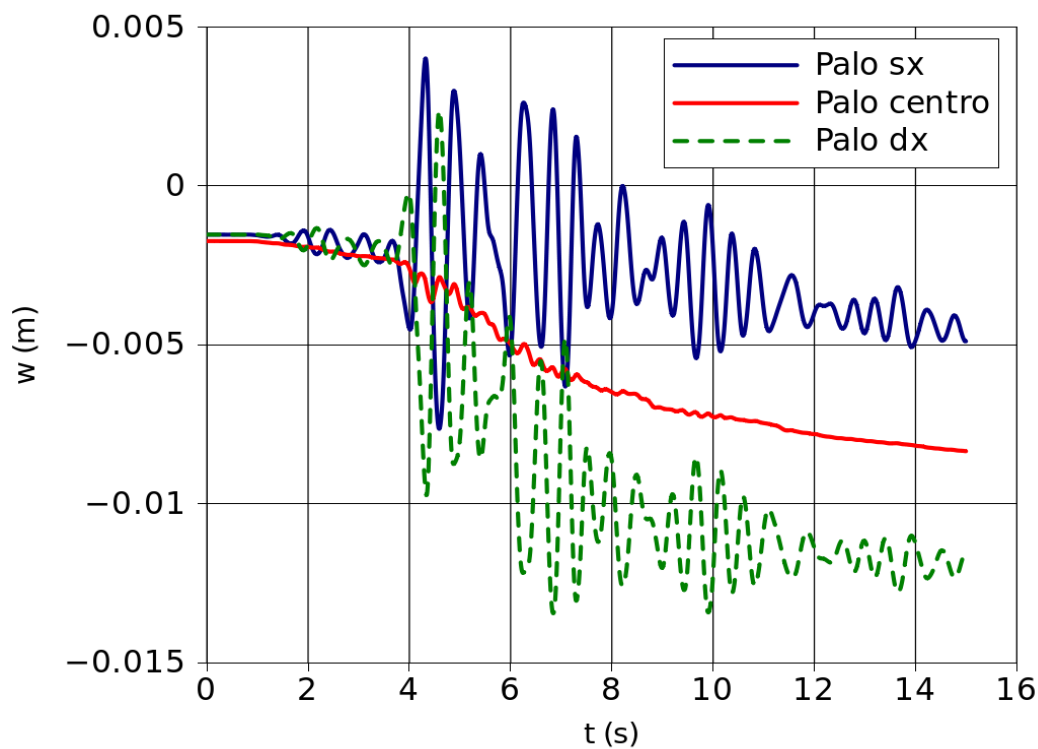


Figura 9.4.10: Spostamenti verticali dei tre pali in presenza di struttura in elevazione.  
Strato superiore con  $Dr=85\%$  (TOT)

#### 9.4.4 Forze assiali nei pali e pressione al contatto tra platea e terreno

Il *rocking* della fondazione in assenza di sovrastruttura può essere apprezzato anche dall'esame delle sollecitazioni nei pali stessi. In Figura 9.4.11 sono stati rappresentati gli andamenti temporali delle forze assiali della testa dei pali e del carico trasmesso direttamente dalla platea al terreno, nel caso in cui la densità relativa nello strato superiore sia 85%.

Dai risultati è possibile notare che il palo di sinistra e quello di destra hanno un comportamento simmetrico rispetto a quello del palo centrale mentre quest'ultimo ha un andamento piuttosto regolare e privo di picchi. Le sollecitazioni in tutti i pali sono sempre di compressione durante l'evento sismico nonostante la forza assiale nel palo di sinistra si avvicini a zero in corrispondenza di circa 4s.

La presenza della struttura in elevazione invece cambia il comportamento del sistema, aumentando il *rocking* della fondazione (Figura 9.4.12) e i pali non rimangono sempre in compressione per tutta la durata del terremoto ma raggiungono anche valori molto elevati in trazione.

Inoltre, il carico trasmesso dalla platea direttamente al terreno diminuisce nel tempo. Infatti, il terreno tende a contrarsi a seguito delle deformazioni indotte dall'evento sismico e, allo stesso modo, la fondazione si abbassa poiché poggia sul terreno che contrae. Tuttavia, la presenza dei pali immorsati in un terreno più rigido e più resistente di quello direttamente a contatto con la platea, riduce l'entità di questi abbassamenti, determinando così la riduzione del carico trasmesso.

In Figura 9.4.13 e 9.4.14 è stata rappresentata la percentuale di carico trasmessa dalla platea direttamente al terreno, rispettivamente nel caso di interazione “cinematica” (KIN) e completa (TOT). Tale rapporto assume valore del 33% nel caso statico per poi scendere fino al 18% circa, dopo 15s dall'inizio dell'evento sismico. L'andamento è comune sia all'analisi “cinematica” sia a quella completa e i valori finali raggiunti sono pressoché uguali. E' da tener presente infine che la percentuale di carico trasmessa in corrispondenza di 15s non è quella finale ma, a causa del processo di consolidazione ancora in atto, tale valore è destinato a diminuire ulteriormente.

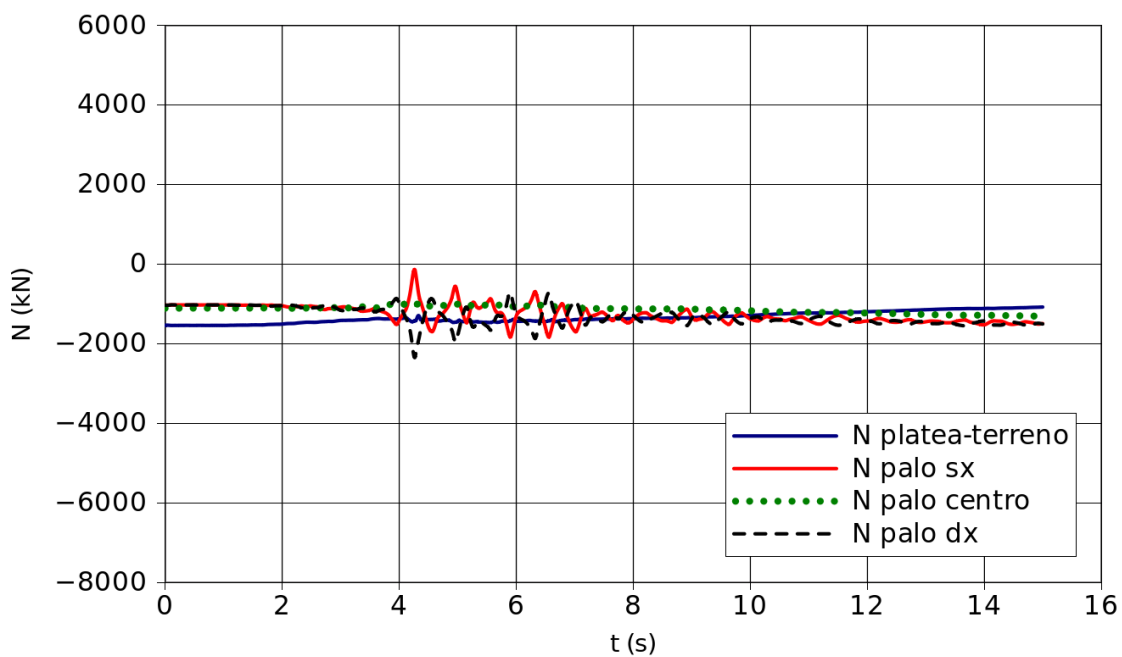


Figura 9.4.11: Andamento temporale dello sforzo normale nei tre pali e del carico complessivo trasmesso direttamente dalla platea al terreno. Assenza della struttura in elevazione (KIN).  $D_r=85\%$ .

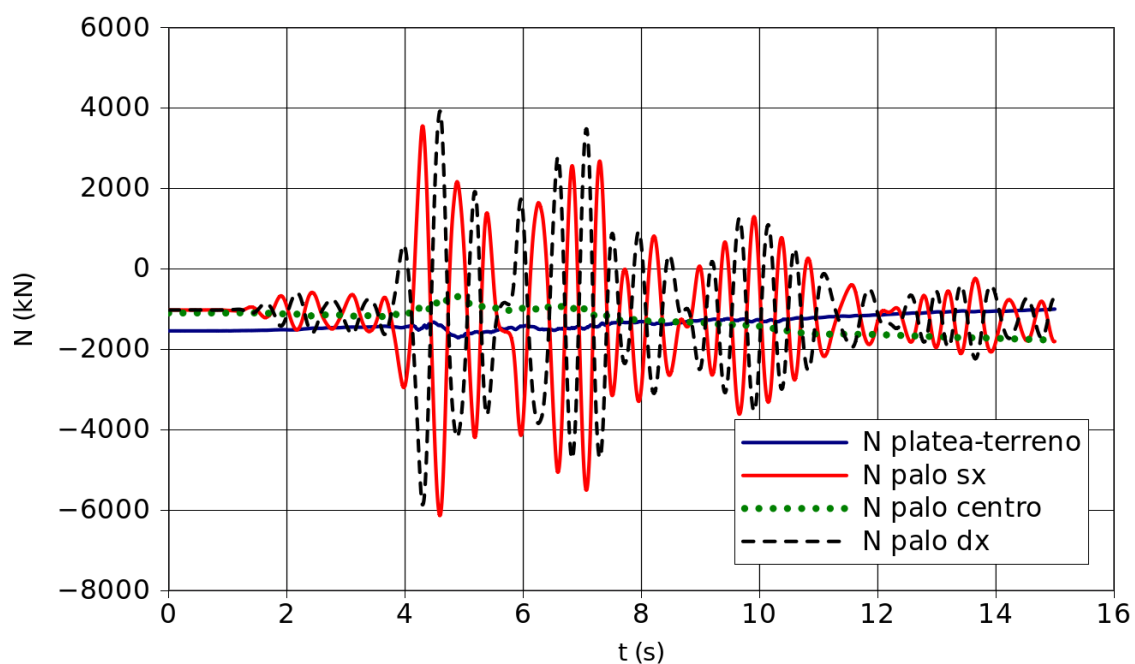


Figura 9.4.12: Andamento temporale dello sforzo normale nei tre pali e del carico complessivo trasmesso direttamente dalla platea al terreno. Presenza della struttura in elevazione (TOT).  $D_r=85\%$ .



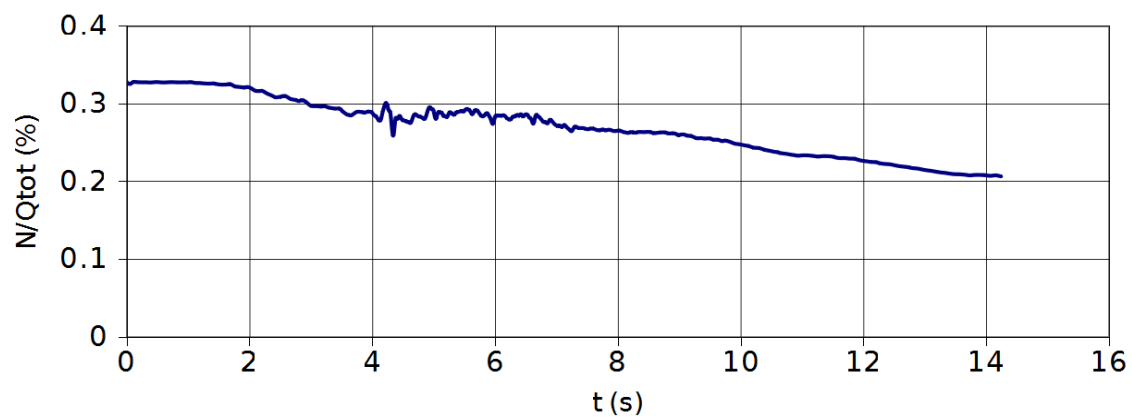


Figura 9.4.13: Percentuale di carico trasmessa dalla platea direttamente al terreno durante l'evento sismico. Assenza di struttura in elevazione.  $D_r=85\%$  (KIN).

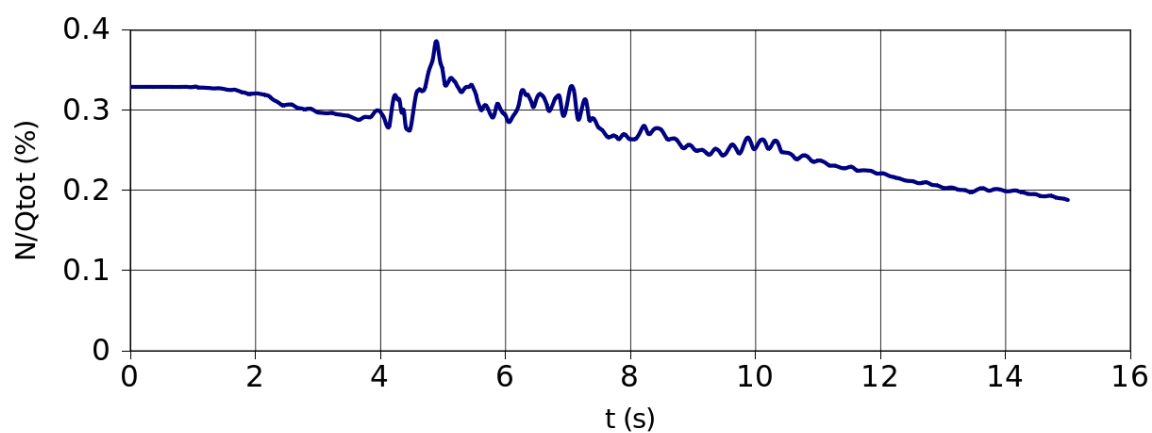


Figura 9.4.14: Percentuale di carico trasmessa dalla platea direttamente al terreno durante l'evento sismico. Presenza della struttura in elevazione.  $D_r=85\%$  (TOT).

### 9.4.5 Incremento delle pressioni interstiziali

Durante l'evento sismico, l'interazione tra il palo e il terreno genera incrementi di pressione interstiziale ( $\Delta u$ ) differenti da quelli indotti nella condizione di campo libero. Inoltre, la presenza di più pali a distanza ravvicinata modifica la rigidezza complessiva del sistema fondazione-terreno e quindi cambia la distribuzione degli incrementi di pressione interstiziale rispetto al caso di palo isolato (Figura 9.4.19).

Per comprendere questo fenomeno è stato opportuno esaminare il caso di rotazione impedita e di assenza di struttura in elevazione (norot KIN). In Figura 9.4.15 sono state rappresentate le  $\Delta u$  su un piano passante per la fila dei tre pali, nell'istante temporale in cui si verifica il momento massimo all'interfaccia. Gli incrementi di pressione interstiziale sono più marcati nel terreno a tergo della prima fila di pali, visibili in figura sulla destra; molto meno rilevanti risultano invece se si considera il terreno che interagisce con la seconda o la terza fila di pali. Lo strato inferiore invece, essendo meno deformabile di quello superiore, genera modesti incrementi di pressione interstiziale.

Fissata una profondità dal piano campagna, le  $\Delta u$  sviluppate nella zona posta in mezzo ai pali sono diverse rispetto a quelle lontano dalla fondazione. Questa differenza tende tuttavia ad attenuarsi se si approfondisce il punto di osservazione al di sotto della base dei pali. In questa porzione di terreno infatti, le uniche variazioni di pressione interstiziale rispetto alle condizioni di campo libero potrebbero essere indotte dal *rocking* dei pali, che tuttavia non è presente poiché la rotazione della platea è impedita.

Prendendo in esame, invece, la fondazione libera di ruotare ed in presenza della struttura in elevazione si nota che le  $\Delta u$  nel terreno al di sotto della base dei pali sono molto diverse da quelle relative al caso precedente (Figura 9.4.16). In questo caso la platea, per effetto della pila e della massa dell'impalcato, ruota in senso orario tirando i pali di sinistra e comprimendo quelli di destra. A questa configurazione corrispondono  $\Delta u$  minori al di sotto della base dei pali di sinistra e maggiori al di sotto di quelli di destra (Figura 9.4.18).

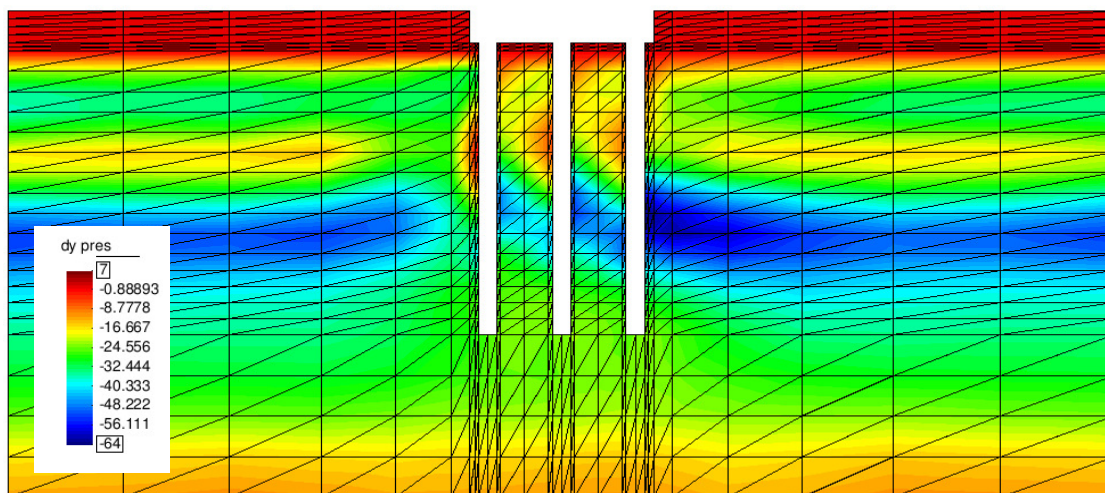


Figura 9.4.15:  $\Delta u$  nel terreno all'istante in cui si sviluppa il massimo momento all'interfaccia. Analisi in assenza di struttura in elevazione (norot KIN). Dr=55%.

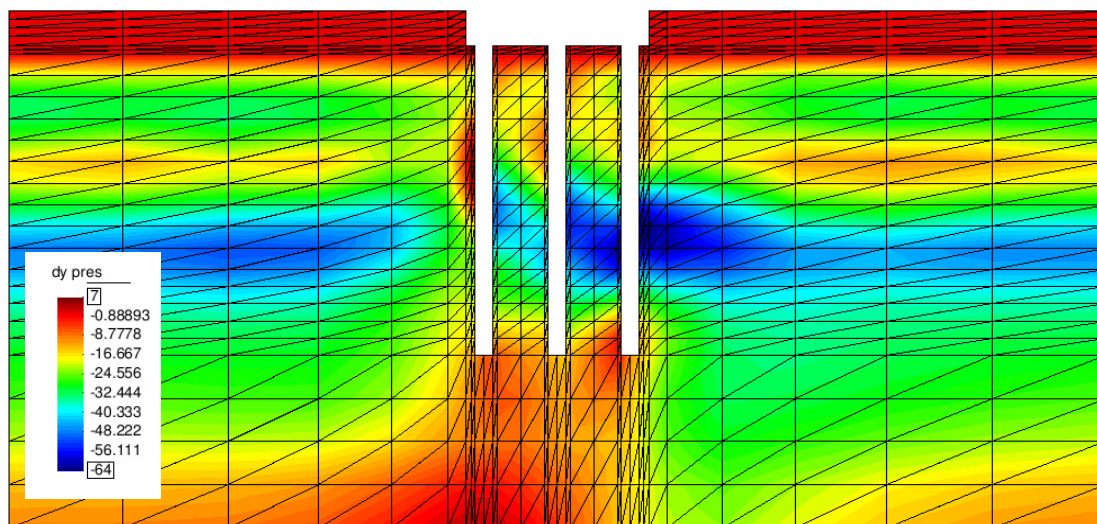


Figura 9.4.16:  $\Delta u$  nel terreno all'istante in cui si sviluppa il massimo momento all'interfaccia. Analisi in presenza di struttura in elevazione. (TOT) Dr=55%.

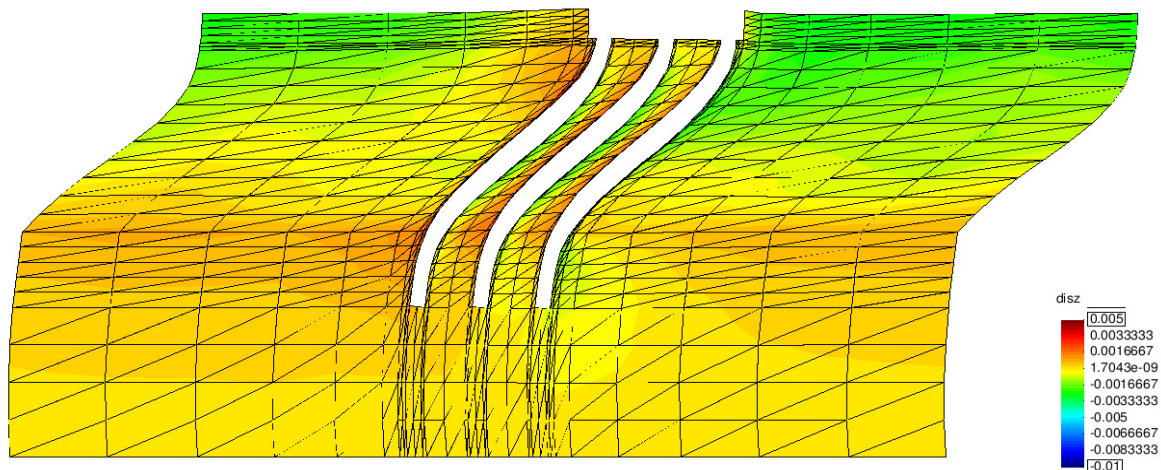


Figura 9.4.17: Spostamenti verticali rappresentati sulla configurazione deformata all'istante in cui si sviluppa il massimo momento all'interfaccia. Analisi in assenza di struttura in elevazione. (norot KIN)  $Dr=55\%$ .

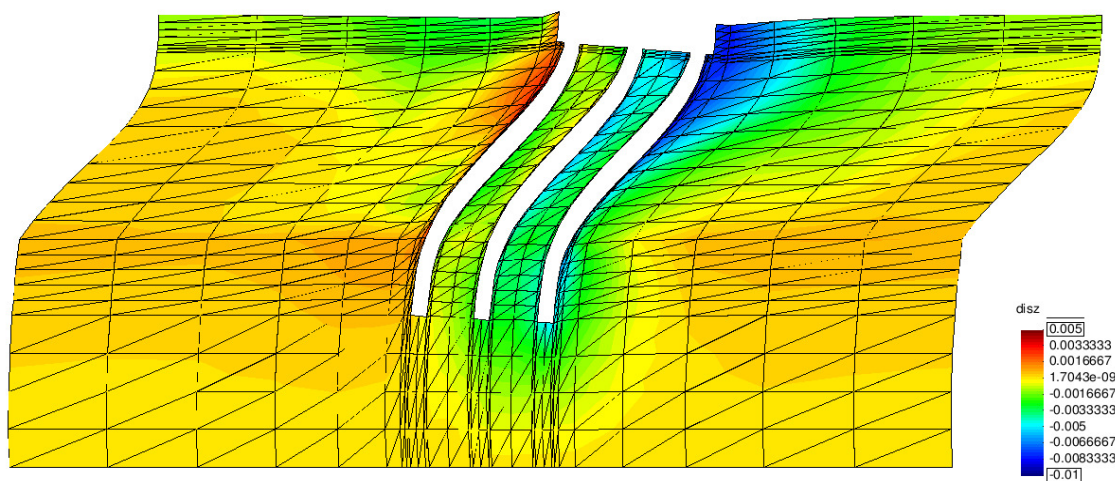


Figura 9.4.18: Spostamenti verticali rappresentati sulla configurazione deformata all'istante in cui si sviluppa il massimo momento all'interfaccia. Analisi in presenza di struttura in elevazione. (TOT)  $Dr=55\%$ .

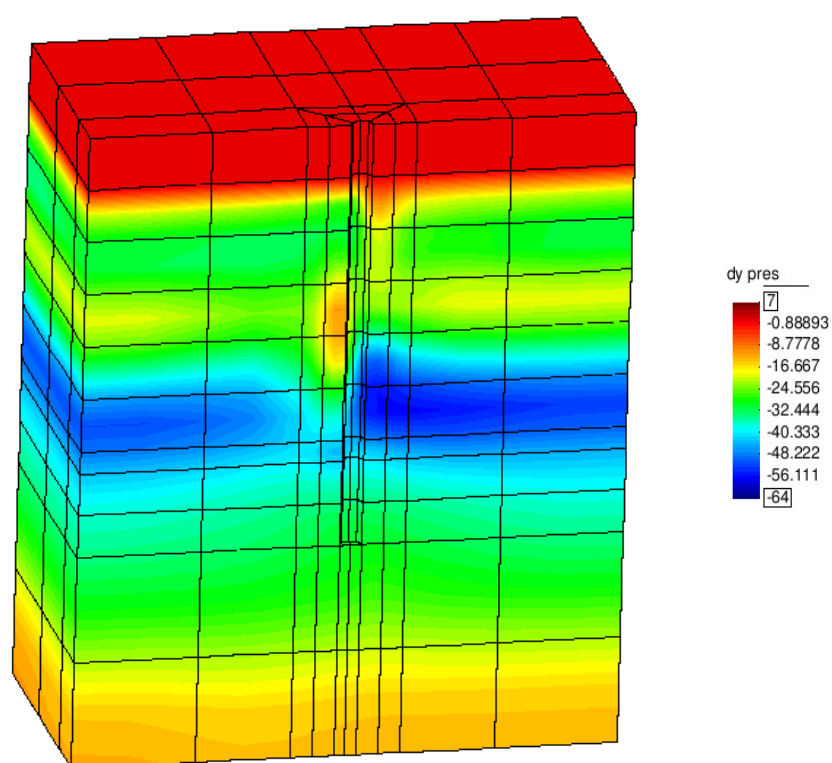


Figura 9.4.19:  $\Delta u$  all'istante in cui si verifica il massimo momento all'interfaccia.  $Dr=55\%$

#### 9.4.6 Involuppo dei massimi momenti flettenti

L'ultimo aspetto messo in luce è rappresentato dall'entità dei momenti flettenti massimi subiti dai pali durante l'evento sismico. Come affermato nel capitolo relativo alla interazione cinematica (Capitolo 7), per un palo di diametro 1m, il contatto stratigrafico è collocato ad una profondità superiore alla lunghezza attiva del palo. Ciò vuol dire che la condizione di vincolo imposto alla testa del palo non viene percepito dalla sezione di interfaccia tra gli strati e viceversa.

Le figure 9.4.20, 9.4.21, 9.4.22, 9.4.23 e 9.4.24 mostrano gli involuppi relativi alle analisi d'interazione cinematica (KIN) e d'interazione completa (TOT), nel caso di platea vincolata alla rotazione (norot) e di platea libera di ruotare. Sebbene la distanza tra la testa del palo e il contatto stratigrafico sia ridotta per la presenza della platea, in tutti i casi comunque il valore massimo dei momenti flettenti in prossimità del contatto stratigrafico rimane pressoché uguale a quello ottenuto dall'analisi con il palo isolato. Soltanto la porzione dei pali prossima alla platea è influenzata dalla modifica della posizione del vincolo alla rotazione (perché collocato a 2m dal piano campagna) ma anche dall'interazione “inerziale”.

Facendo riferimento alla sola interazione cinematica (KIN), la presenza del vincolo alla rotazione non produce alcun effetto significativo sull'involuppo dei momenti massimi nei pali. Infatti, in assenza di struttura in elevazione, il *rocking* della fondazione è molto modesto e può essere trascurato per la valutazione della risposta dinamica del sistema. Inoltre, le sollecitazioni in corrispondenza della testa dei pali sono maggiori di quelle del palo isolato poiché sono influenzate, in parte dalla massa della fondazione e in parte dalla differente posizione della sezione dei pali vincolata alla rotazione, collocata 2 metri al di sotto del piano campagna.

Se si considera infine l'analisi di interazione completa si nota che le sollecitazioni sui pali in prossimità della platea aumentano per effetto dell'inerzia della struttura in elevazione. Inoltre, in questo caso, il *rocking* della fondazione è molto più accentuato rispetto al caso della sola interazione cinematica, perciò le sollecitazioni nei pali sono molto differenti da quelle ottenute dall'analisi con la platea vincolata alla rotazione (Figura 9.4.21 e Figura 9.4.22; Figura 9.4.23 e Figura 9.4.24).

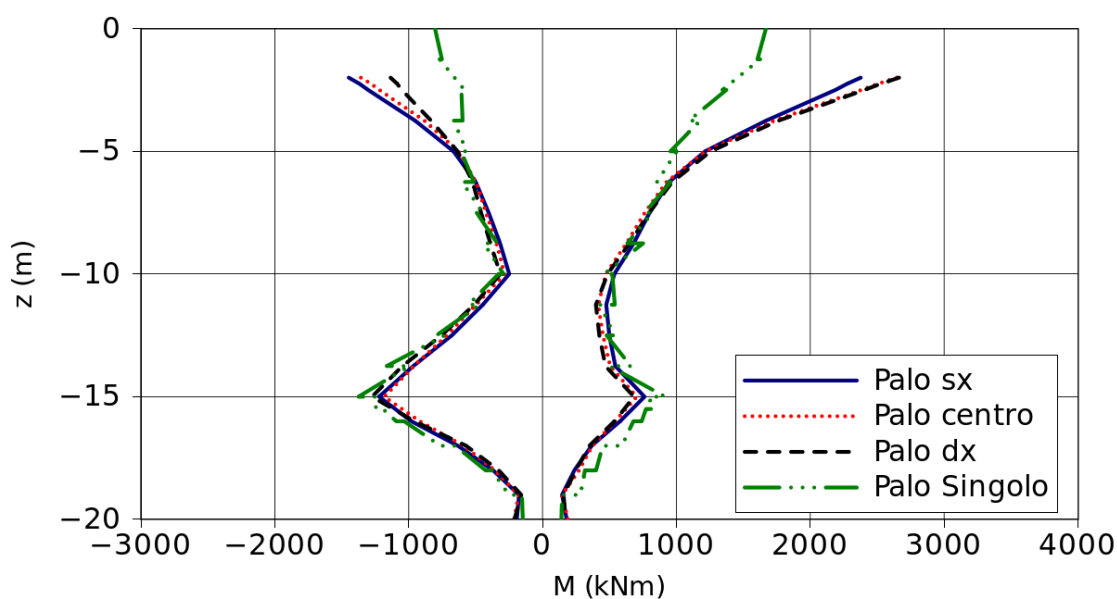


Figura 9.4.20: Involuppo dei momenti massimi nei tre pali e confronto con il palo isolato. Assenza di struttura in elevazione. (KIN)  $D_r=85\%$ .

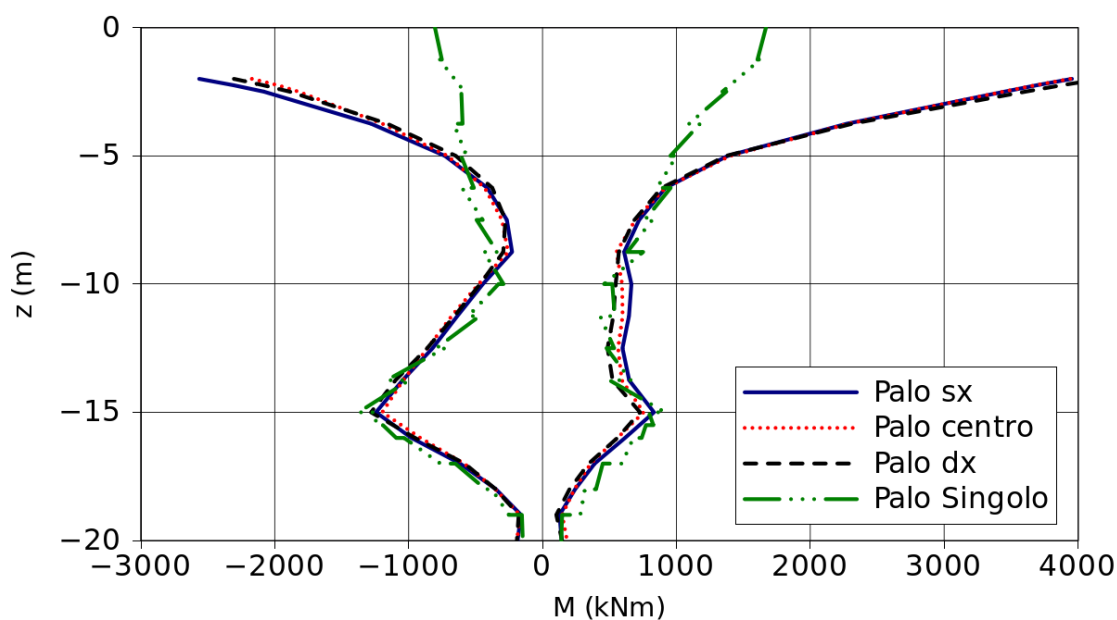


Figura 9.4.21: Involuppo dei momenti massimi nei tre pali e confronto con il palo isolato. Presenza della struttura in elevazione e platea impedita alla rotazione. (norot TOT)  $D_r=85\%$ .

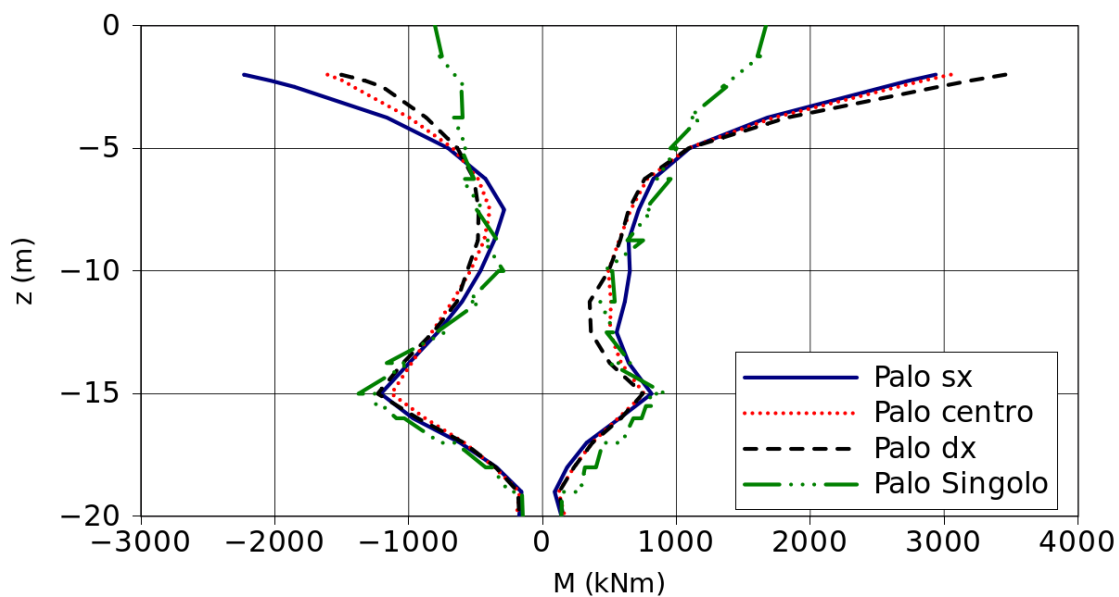


Figura 9.4.22: Involuppo dei momenti massimi nei tre pali e confronto con il palo isolato. Presenza della struttura in elevazione. (TOT)  $D_r=85\%$ .

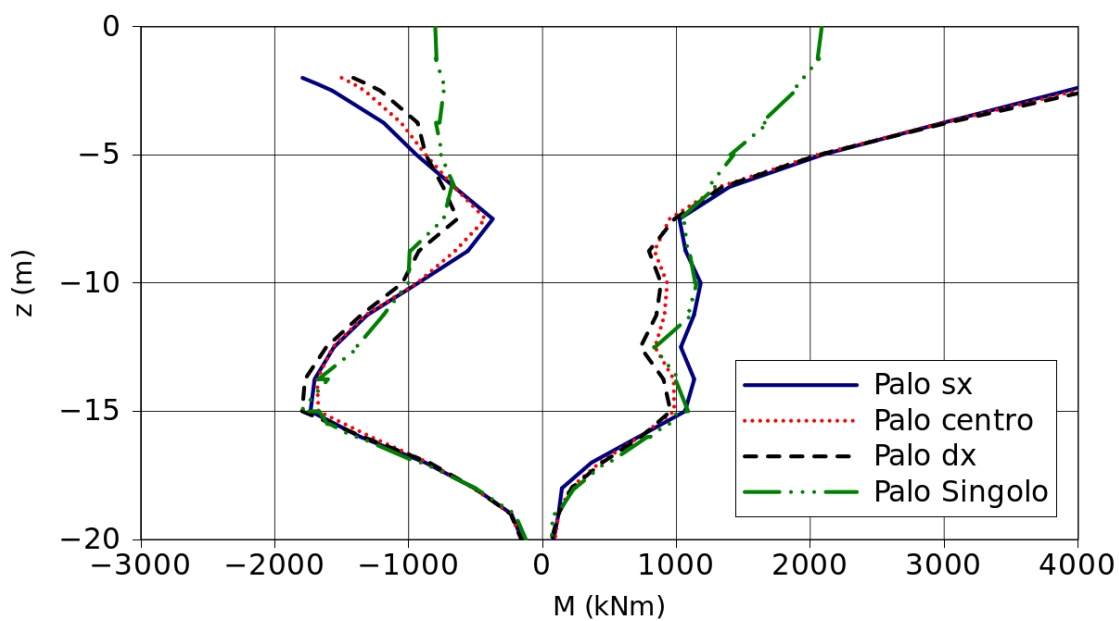


Figura 9.4.23: Involuppo dei momenti massimi nei tre pali e confronto con il palo isolato. Presenza della struttura in elevazione e platea impedita alla rotazione. (norot TOT)  $D_r=55\%$ .



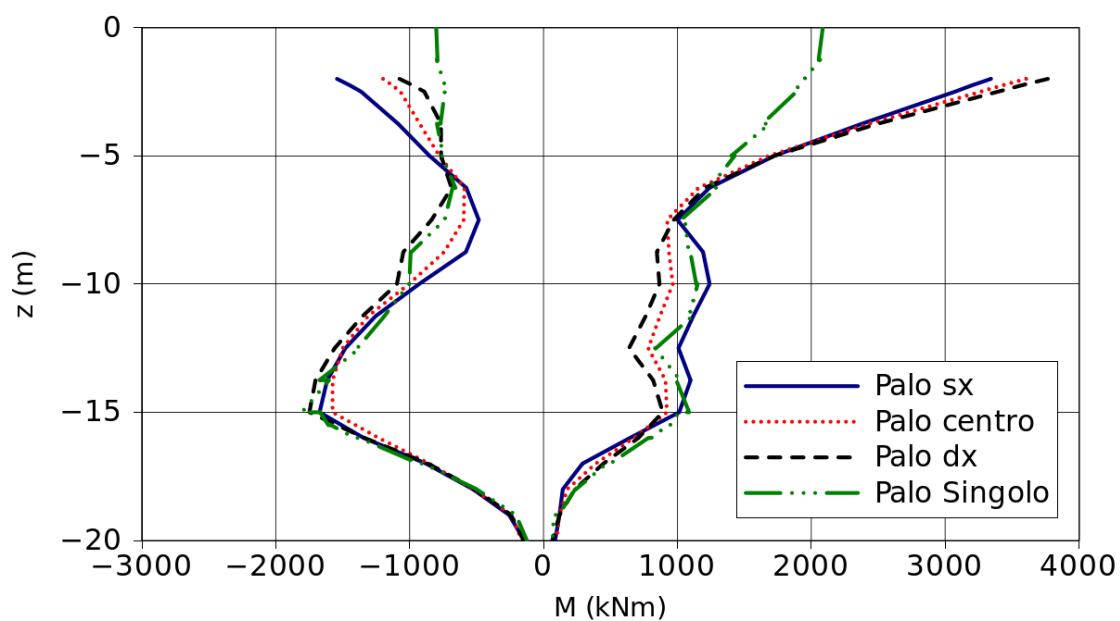


Figura 9.4.24: Involuppo dei momenti massimi nei tre pali e confronto con il palo isolato. Presenza della struttura in elevazione. (TOT)  $D_r=55\%$ .



## CONCLUSIONI

Il presente lavoro ha avuto come obiettivo quello di fornire un contributo alla comprensione del comportamento di fondazioni profonde sotto l'azione sismica, con particolare attenzione alle fondazioni miste costituite da platea su pali. Lo studio, a carattere esclusivamente numerico, ha preso in considerazione terreni a grana grossa saturi tenendo conto anche dell'accumulo e della dissipazione delle pressioni interstiziali generate durante l'evento sismico.

L'esecuzione di analisi numeriche avanzate ha richiesto l'impiego di equazioni costitutive per il terreno capaci di descrivere gli aspetti essenziali del suo comportamento meccanico in condizioni di carico ciclico e dinamico. L'analisi dei modelli disponibili in letteratura ha suggerito di non prendere in considerazione i modelli elastoplastici classici adottati per i terreni, formulati nell'ambito della teoria della plasticità perfetta o con incrudento volumetrico, ma di scegliere due modelli costitutivi ad incrudimento cinematico, che hanno origine dalla versione di *Manzari & Dafalias (1997)*; *Papadimitriou & Bouckovalas (2002)* (PB in seguito) e *Dafalias & Manzari (2004)* (DM in seguito).

Il primo è stato utilizzato esclusivamente per riprodurre a livello di elemento di volume il comportamento meccanico dei terreni a grana grossa, sviluppando in Matlab un driver costitutivo basato sull'algoritmo di *Bardet & Chouhair (1991)*.

L'impiego del modello costitutivo DM anche per analisi al finito ha richiesto l'implementazione di un modulo esterno UMAT.f (scritta in Fortran 77) nel codice commerciale agli elementi finiti TOCHNOG Professional (v.5.4). L'algoritmo scelto per l'integrazione delle equazioni costitutive è quello di Runge-Kutta-Fehlberg (RKF23) del terzo ordine. A causa della sua considerevole complessità e del carattere totalmente automatico, l'implementazione di questo algoritmo è stata sottoposta ad una accurata procedura di verifica.

Il modello costitutivo implementato è stato poi impiegato per lo studio di due tipi di problemi al finito idealizzati: l'interazione cinematica tra un palo isolato e il terreno e l'interazione dinamica completa tra il terreno, la fondazione e la struttura in elevazione.

La stratigrafia presa in esame è costituita da due strati, ciascuno di spessore pari a 15 m. Lo strato superiore ha le proprietà meccaniche della *Toyoura Sand* mentre lo strato inferiore è più rigido e resistente. Per il primo strato l'indice dei vuoti determina valori negativi del parametro di stato  $\psi$  (Been & Jefferies, 1985), corrispondente a densità relative comprese tra il 55% e l'85%.

Le analisi, svolte sempre in tensioni efficaci, sono di tre tipi: analisi drenate, analisi non drenate e analisi di consolidazione. Gli eventi sismici considerati per le analisi sono due: Tolmezzo–Diga Ambiesta (6/5/1976) (componente WE) e Sturno (23/11/1980) (componente NS), aventi un'analogia intensità di Arias ma storie temporali molto diverse per accelerazione massima, Durata Significativa e contenuto in frequenza.

Prima di affrontare lo studio dei due problemi al finito è stato opportuno condurre le analisi di risposta sismica locale (in assenza di elementi strutturali) per tutte le condizioni di densità relativa, focalizzando l'attenzione sulle sovrappressioni interstiziali indotte ( $\Delta u$ ) e la loro evoluzione nel tempo, sull'entità delle deformazioni massime di taglio raggiunte in tutti e due gli strati ed infine sull'andamento nel tempo degli spostamenti verticali e delle velocità orizzontali in superficie. L'esame di questi aspetti è stato utile per interpretare correttamente i risultati delle analisi di interazione.

### **Analisi di risposta sismica locale**

L'evento sismico di Tolmezzo, con Durata Significativa molto breve, libera tutta l'energia in breve tempo e con notevole intensità. Il terreno quindi viene sottoposto ad un modesto numero di cicli che però corrisponde ad intense sollecitazioni deviatoriche che conducono lo stato tensionale oltre la superficie di dilatanza. Per questa ragione, per un materiale fortemente addensato e solo in corrispondenza della fase intensa dell'evento sismico, si possono sviluppare anche notevoli riduzioni delle pressioni interstiziali. L'energia dell'evento sismico di Sturno, invece, viene liberata in un tempo più lungo e con un numero di cicli più elevato dell'altro terremoto. Il terreno quindi subisce sollecitazioni deviatoriche modeste che, per la maggior parte dei casi, mantengono lo stato tensionale al di sotto della superficie di dilatanza. Per questa ragione anche in corrispondenza della fase intensa

dell'evento sismico non sono evidenti zone nelle quali si sviluppano sovrappressioni di decompressione poiché il materiale tende principalmente a contrarsi.

Il fenomeno fondamentale, che è stato individuato in tutte le analisi, è lo sviluppo di non trascurabili sovrappressioni interstiziali di compressione, nonostante la sabbia in tutti i casi abbia un parametro di stato  $\Psi$  negativo e quindi possa essere classificata come densa. La loro entità, tuttavia, dipende non solo dalle caratteristiche del terreno ma anche dall'input sismico considerato.

Tali incrementi si sviluppano nello strato superiore, meno addensato e perciò più compressibile, per poi diffondersi anche in quello inferiore. Per valori relativamente bassi della permeabilità le sovrappressioni nello strato superiore permangono per tutta la durata dell'evento sismico; i due strati sono sostanzialmente idraulicamente “indipendenti” e il processo di consolidazione, di fatto, si attiva nella fase post-sisma. Se invece la permeabilità del terreno è maggiore la dissipazione delle sovrappressioni avviene già durante l'evento sismico e il loro completo annullamento si raggiunge dopo 50 secondi circa.

La tendenza alla contrazione del terreno induce, per tutti i valori di densità relativa presi in considerazione, abbassamenti del piano campagna apprezzabili già dai primi istanti dell'evento sismico, che diventano più importanti all'aumentare della permeabilità degli strati e della durata dell'evento.

Il profilo delle deformazioni massime raggiunte nei due strati dipende fortemente dalla densità relativa, dalle condizioni di drenaggio e dal numero di cicli del terremoto. In generale, le massime deformazioni possono essere raggiunte non solo per effetto delle massime sollecitazioni applicate alla base ma anche a seguito dell'accumulo della componente non reversibile delle deformazioni, molto significativa se la durata dell'evento sismico è importante (ad es. evento sismico di Sturmo).

Il semplice approccio lineare equivalente, purché correttamente calibrato, consente di riprodurre con sufficiente approssimazione il moto in superficie e le deformazioni massime raggiunte lungo la profondità soltanto nell'ipotesi di comportamento drenato del terreno, ma non risulta più sufficiente se l'entità delle sovrappressioni interstiziali inizia ad essere significativa.

### **Interazione cinematica palo-terreno**

Le analisi di interazione hanno riguardato due diverse densità relative dello strato superiore (85% e

55%). Il palo, studiato sia nell'ipotesi di rotazione libera in testa sia di rotazione impedita, ha un diametro variabile da 0,6m a 1,5m e lunghezza compresa tra 16 e 20 m.

In tutti i casi esaminati, ad eccezione del palo di diametro 1.5m, la presenza del vincolo in testa si risente fino a 7-8 diametri di profondità cosicché i valori del momento al contatto tra i due strati risultano sostanzialmente indipendenti da tale vincolo. Le massime sollecitazioni flettenti calcolate raggiungono o eccedono i momenti di plasticizzazione del palo, testimoniando così l'importanza in termini quantitativi del fenomeno studiato.

I momenti flettenti sono fortemente influenzati dalle pressioni interstiziali, la cui entità dipende non solo dalle caratteristiche del terreno ma anche dall'input sismico considerato. Per l'evento sismico di Tolmezzo i momenti flettenti massimi in corrispondenza dell'interfaccia e della testa risultano dipendenti dalle  $\Delta u$  ma sono causati dall'unica fase intensa della storia temporale applicata alla base. L'evento sismico di Sturno è invece costituito da due fasi intense successive (di cui la prima maggiore della seconda); questa circostanza dà luogo ad un comportamento sostanzialmente diverso, specialmente per il caso densità relativa più bassa: gli incrementi di pressione interstiziale, accumulandosi al procedere dei cicli, fanno raggiungere al palo le sollecitazioni massime per effetto della seconda fase intensa. Le analisi svolte per confronto in condizioni drenate non tenendo conto di questo contributo sottostimano le sollecitazioni massime (poiché esse sono dovute sempre alla prima fase intensa, anche nelle condizioni di terreno sciolto).

Le sollecitazioni in corrispondenza dell'interfaccia sono fortemente influenzate dalla lunghezza della porzione di palo immersa nello strato consistente inferiore ( $L_p$ ). In tutti i casi esaminati il momento flettente cresce fino a quando la lunghezza  $L_p$  raggiunge 5 diametri; oltre questa soglia, il confinamento della base del palo è sufficiente per considerare il palo infinitamente lungo. Invece, i momenti flettenti alla testa del palo non sono influenzati in alcun modo dalla lunghezza  $L_p$ .

I risultati ottenuti mostrano che le pressioni interstiziali nelle vicinanze del palo vengono modificate rispetto a quelle generate nella condizione di *free-field* dall'interazione terreno-struttura. Maggiore è il diametro e più elevate sono le variazioni di  $\Delta u$ ; tuttavia, ai fini della valutazione dei momenti flettenti in testa e all'interfaccia, tale modifica risulta poco influente rispetto alla  $\Delta u$  indotta dal *free-field* stesso.

Per quanto riguarda le sollecitazioni massime in corrispondenza della testa, i risultati hanno mostrato che esse tendono a diminuire all'aumentare del diametro, in accordo con le osservazioni di Di Laora e

---

*Mandolini (2011).*

La presenza di un palo immerso nel terreno induce anche una modifica del moto sismico in testa per effetto dell'interazione cinematica. L'esame dei risultati ha mostrato che se il materiale si trova in condizioni drenate gli spettri di risposta del segnale registrato in testa al palo sono perfettamente sovrapposti a quello di *free-field*; se invece si considerano le analisi di consolidazione, gli spettri mostrano alcune differenze in corrispondenza di periodi bassi. Tutte le analisi hanno comunque evidenziato che l'accelerazione massima diminuisce all'aumentare del diametro del palo, in modo più marcato in presenza di terreno poco addensato.

Le sollecitazioni flettenti ottenute con le analisi tridimensionali sono state messe a confronto con quelle derivanti dall'utilizzo di differenti approcci semplificati, distinguendo quelli relativi all'interfaccia da quelli ideati per la testa del palo. Lo studio, prendendo in considerazione solamente il palo di diametro 1m e lunghezza 20m, è stato articolato in due livelli. Il primo ha consentito di stabilire, a parità di dati di ingresso ricavati dall'analisi di *free-field* con il modello D&M, quale fosse il metodo più affidabile; il secondo, invece, ha messo in luce, per ciascun metodo utilizzato, la variabilità della soluzione in funzione dell'accuratezza dei dati di ingresso.

Dalla prima parte dello studio di confronto è emerso che i metodi semplificati possono stimare sia per eccesso sia per difetto le “reali” sollecitazioni indotte, sia in corrispondenza del contatto stratigrafico sia in corrispondenza della testa. Per quanto riguarda il contatto stratigrafico, i metodi che sono sembrati più soddisfacenti sono quelli di *Di Laora et al. (2011)* e *Mylonakis (2001)* che, nonostante la loro semplicità e l'aver trascurato il carattere dinamico del moto, consentono di stimare con ragionevole approssimazione le sollecitazioni massime indotte, purché i parametri di ingresso siano ricavati da una analisi di risposta sismica locale condotta con un modello costitutivo particolarmente accurato. Tuttavia risulta doveroso comunque sottolineare che, in presenza di eventi sismici con elevata durata significativa, è possibile che questi due metodi forniscano stime in eccesso della sollecitazione a causa della non contemporaneità tra la deformazione di taglio massima di *free-field* (dato di ingresso nei due metodi) e la sollecitazione massima indotta effettivamente nel palo. Per quanto riguarda la testa del palo invece, il metodo che è sembrato accurato è quello presente nelle norme *NEHRP (1997)*, purché adeguatamente utilizzato tenendo conto delle indicazioni di *Di Laora e Mandolini (2011)*.

La seconda parte dello studio ha mostrato che l'uso di dati di ingresso più “realistici”, quindi calcolati da analisi di *free-field* con il modello D&M, migliora sicuramente l'accuratezza delle stime fornite dai

metodi semplificati a condizione che tutti dati siano ricavati in modo diretto. Nel caso in cui qualche dato sia ricavato in modo indiretto, i risultati continuano ad essere accurati a condizione che questi dati abbiano un peso poco significativo.

### **Interazione completa terreno-fondazione-struttura in elevazione**

Nell'ultimo capitolo è stato affrontato il problema dell'interazione tra la struttura, la fondazione e il terreno. E' stato preso in esame il caso di una pila da ponte ferroviario, a sezione circolare, avente fondazione costituita da una platea su sei pali di lunghezza 18m ciascuno. Le analisi sono state condotte sotto l'ipotesi di comportamento elastico lineare degli elementi strutturali e di assenza di interazione tra le pile poiché l'evento sismico è stato applicato in direzione ortogonale alla linea d'asse dell'impalcato.

La stratigrafia presa in esame è la stessa utilizzata anche per il problema dell'interazione cinematica nel Capitolo 7 nella quale però lo strato superiore è costituito solamente da densità relativa con valori pari al 55% e al 85%. Inoltre, contrariamente alle analisi di interazione cinematica, l'unico tipo di analisi effettuato in questo studio di interazione completa è quella di consolidazione con permeabilità pari a  $10^{-4}$  m/s, omogenea in tutto il terreno, con l'evento sismico di Tolmezzo (componente WE) applicato alla base del modello.

Dal rapporto tra gli spettri di Fourier del segnale in testa e di quello di *free-field* è emerso che la funzione di amplificazione del complesso struttura-fondazione ha una forma riconducibile ad un oscillatore elementare.

Dall'analisi degli spettri elastici di risposta del segnale registrato sulla fondazione in presenza di pila (interazione totale) e in sua assenza (interazione “cinematica”) è stato possibile evidenziare l'azione di filtraggio delle componenti ad alta frequenza del segnale che si propaga nel terreno, per effetto della presenza dei pali collegati dalla platea.

Durante l'evento sismico, anche in assenza della struttura in elevazione, vengono indotti nei pali sforzi di compressione e decompressione a cui corrisponde il *rocking* della fondazione. Inoltre, il terreno al di sotto della platea tende ad abbassarsi in misura maggiore rispetto alla platea stessa, determinando la progressiva riduzione del carico trasmesso direttamente dalla platea al terreno sottostante. Questo



comportamento è indipendente dalla presenza della struttura in elevazione.

L'interazione tra il palo e il terreno genera incrementi di pressione interstiziale differenti da quelli indotti nella condizione di campo libero. La presenza di più pali a distanza ravvicinata modifica la rigidezza complessiva del sistema fondazione-terreno e quindi cambia la distribuzione degli incrementi di pressione interstiziale rispetto al caso di palo isolato. Il *rocking* prodotto dalla struttura in elevazione induce  $\Delta u$  anche al di sotto della base dei pali nello strato consistente.

Infine, l'entità dei momenti flettenti massimi indotti nei pali durante l'evento sismico, in prossimità dell'interfaccia, rimane pressoché uguale a quello ottenuto dall'analisi con il palo isolato, sebbene la distanza tra la testa del palo e il contatto stratigrafico sia ridotta per la presenza della platea. Soltanto la porzione dei pali prossima alla platea è influenzata anche dall'interazione “inerziale”.

### **Possibili sviluppi futuri**

Nell'ambito di questo studio, sia nelle analisi di interazione cinematica sia in quelle di interazione completa, si è fatto uso da un di un legame costitutivo molto avanzato per il terreno ma si è limitata l'attenzione solamente al comportamento lineare degli elementi strutturali.

Sebbene questo approccio sia stato utile nell'ottica di fornire soluzioni di riferimento per i metodi semplificati, le sollecitazioni così calcolate però superano in molti casi le resistenze disponibili in tali elementi.

Una maggiore comprensione del fenomeno studiato richiede necessariamente lo studio del comportamento con l'ausilio di modelli strutturali in grado di riprodurre gli aspetti essenziali messi in luce dalle evidenze sperimentali. Un modello strutturale già presente nel codice FEI ed immediatamente utilizzabile è quello non lineare a “fibre” per elementi tipo “*beam*”, che consente di riprodurre il comportamento non lineare a flessione di una sezione di calcestruzzo armata.

Inoltre, se da un lato l'analisi del comportamento del palo singolo è stata condotta in modo dettagliato mettendo a punto un esteso studio parametrico, l'analisi della risposta sismica della pila da ponte si è limitata ad un caso di specie. Per questa ragione, nell'immediato futuro è possibile mettere a punto uno

studio parametrico anche per il problema di interazione completa terreno-fondazione-struttura. I risultati, quindi, per la accuratezza dei legami costitutivi utilizzati, possono risultare efficaci nel descrivere gli aspetti significativi del problema e possono anche costituire una soluzione di riferimento per validare approcci semplificati.

# Appendice

## **IMPLEMENTAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI DELLE EQUAZIONI DINAMICHE**

## A.1. INTRODUZIONE

In questa Appendice sono state illustrate la modalità di discretizzazione spaziale delle equazioni dinamiche, adottate nel metodo degli elementi finiti, relative alle formulazioni HSP, MSP e UP, riportate nel Capitolo 4.

L'implementazione numerica è presente anche nei lavori di *Jeremic et al. (2008)*, *Taiebat et al. (2009)* e negli appunti di Geomeccanica Computazionale del Professor Boris Jeremic disponibili sul sito <http://sokocalo.engr.ucdavis.edu/jeremic/>.

## A.2. FORMULAZIONE DEI PROCESSI HSP

### A.2.1. Equazioni generali

Il sistema di equazioni differenziali che controlla nello spazio e nel tempo l'evoluzione dello scheletro solido e del fluido interstiziale è descritto da:

$$\frac{n}{K_w} \dot{p}_w + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad - \text{conservazione della massa della miscela;} \quad (\text{A.2.1})$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho (\underline{b} - \underline{a}^s) - n \rho_w \underline{a}^{ws} = 0 \quad - \text{conservazione della quantità di moto della miscela;} \quad (\text{A.2.2})$$

$$\underline{w}^w = -k_w \left[ \text{grad}(p_w) - \rho_w (\underline{b} - \frac{d \underline{v}^w}{dt}) \right] \quad - \text{legge di d'Arcy generalizzata;} \quad (\text{A.2.3})$$

$$\dot{\underline{\sigma}}' = D(\underline{\sigma}', \underline{q}, \underline{\eta}) \dot{\underline{\epsilon}} \quad - \text{legame costitutivo;} \quad (\text{A.2.4})$$

$$\dot{\underline{q}} = H(\underline{\sigma}', \underline{q}, \dot{\underline{\epsilon}}, \underline{\eta}) \quad - \text{legge di incrudimento;} \quad (\text{A.2.5})$$

$$\epsilon_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right) \quad - \text{tensore incremento di deformazioni dello scheletro solido} \quad (\text{A.2.6})$$

(regime di piccoli spostamenti).

E' possibile scrivere la velocità relativa media dell'acqua rispetto allo scheletro solido come derivata dello spostamento relativo medio ( $\bar{W}$ ) e la velocità dello scheletro solido come la derivata dello spostamento ( $\bar{u}$ )

$$\dot{\bar{W}} = \bar{w}^w \quad (\text{A.2.7})$$

$$\dot{\bar{u}} = \bar{v}^s \quad (\text{A.2.8})$$

Le equazioni possono essere espresse in una nuova forma:

$$\frac{\partial \dot{\bar{W}}_i}{\partial x_i} + \epsilon_{ii} + \frac{\dot{\bar{p}}_w}{Q} = 0 \quad - \text{conservazione della massa della miscela;} \quad (\text{A.2.9})$$

poiché  $\frac{1}{Q} = \frac{n}{K_w} + \frac{\alpha - n}{K_s} \approx \frac{n}{K_w} + \frac{1-n}{K_s}$  e se  $K_s \rightarrow \infty$  allora  $\frac{1}{Q} \approx \frac{n}{K_w}$ , inoltre  $\frac{\partial \dot{\bar{u}}_i}{\partial x_i} = \epsilon_{ii}$ .

Al posto della legge di conservazione della quantità di moto di tutta la miscela è possibile utilizzare solo quella relativa alla sola fase solida:

$$n_s \rho_s \left( \bar{b} - \frac{d \bar{v}^s}{dt} \right) + \hat{\bar{p}}^s + \frac{\partial \sigma_i^s}{\partial x_i} = 0 \quad - \text{conservazione della quantità di moto della fase solida;} \quad (\text{A.2.10})$$

Noto che  $n_s = (1-n)$ ,  $\bar{v}^s = \bar{u}$ ,  $\hat{\bar{p}}^s = -\hat{\bar{p}}^w = nR$  dove  $R$  rappresenta la pressione effettiva nel poro, l'equazione si riduce a:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + (1-n) \rho_s \bar{b} - (1-n) \rho_s \ddot{\bar{u}} + nR = 0 \quad (\text{A.2.10})$$

Al posto della legge di d'Arcy generalizzata è possibile considerare l'equazione di conservazione della quantità di moto della fase fluida.

$$n \rho_w \left( \bar{b} - \frac{d \bar{v}^w}{dt} \right) + \hat{\bar{p}}^w + \frac{\partial \sigma_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad - \text{conservazione della quantità di moto della fase fluida.}$$

Dividendo per la porosità si ottiene:  $\rho_w \left( \bar{b} - \frac{d \bar{v}^w}{dt} \right) + \frac{\hat{\bar{p}}^w}{n} + \frac{1}{n} \frac{\partial \sigma_i^w}{\partial x_i} = 0$ .

Noto che  $\underline{\sigma}^w = -n p_w \underline{\delta} = -n p_w \underline{\delta}$ ,  $\underline{v}^w = n(\underline{\ddot{u}} + \underline{\ddot{W}})$  e  $\underline{R} = -\frac{\hat{p}_w}{n}$  che rappresenta la pressione effettiva nel poro, segue che l'equazione si riduce a:

$$\rho_w(\underline{\ddot{u}} - \underline{\ddot{b}}) + \rho_w \frac{\underline{\ddot{W}}}{n} + \underline{R} - \frac{\partial p_w}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.2.11})$$

Le equazioni sono state semplificate e sono riassunte:

$$\frac{\partial \dot{W}_i}{\partial x_i} + \epsilon_{ii} + \frac{\dot{p}_w}{Q} = 0 \quad - \text{conservazione della massa della miscela;} \quad (\text{A.2.12})$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + (1-n)\rho_s \underline{\ddot{b}} - (1-n)\rho_s \underline{\ddot{u}} + n\underline{R} = 0 \quad - \text{conservazione della q.tà di moto della fase solida;} \quad (\text{A.2.13})$$

$$\rho_w(\underline{\ddot{u}} - \underline{\ddot{b}}) + \rho_w \frac{\underline{\ddot{W}}}{n} + \underline{R} + \frac{\partial p_w}{\partial x_i} = 0 \quad - \text{conservazione della q.tà di moto della fase fluida.} \quad (\text{A.2.14})$$

### A.2.2. Cambiamento di variabile

Per comodità è possibile introdurre una nuova variabile al posto di quella che rappresenta la velocità relativa media dell'acqua rispetto allo scheletro solido.

$$U = u + \frac{W}{n} \quad (\text{A.2.15})$$

Introducendo il principio delle tensioni efficaci nella (A.2.13) si ottiene:

$$\frac{\partial \sigma'_i}{\partial x_i} - (1-n)\frac{\partial p_w}{\partial x_i} + (1-n)\rho_s \underline{\ddot{b}} - (1-n)\rho_s \underline{\ddot{u}} + n\underline{R} = 0 \quad (\text{A.2.16})$$

Moltiplicando la (A.2.14) per la porosità  $n$  si ottiene:

$$-n \frac{\partial p_w}{\partial x_i} - n\underline{R} - \rho_w n \underline{\ddot{U}} + \rho_w n \underline{\ddot{b}} = 0 \quad (\text{A.2.17})$$

Differenziando la (A.2.15) rispetto al tempo, sostituendo nella (A.2.12) e integrando nuovamente rispetto al tempo si ottiene:

$$-n \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = (1-n) \epsilon_{ii} + \frac{p_w}{Q} \quad (\text{A.2.18})$$

Le equazioni (A.2.16, A.2.17 e A.2.18) sono scritte presentano una forma molto conveniente poiché presentano il termine  $\ddot{\underline{u}}$  solamente nella (A.2.16) ed il termine  $\ddot{\underline{U}}$  solamente nella (A.2.17) cosicché è possibile ottenere una scrittura delle matrici in forma diagonale.

Le incognite del problema sono:

- lo spostamento assoluto dello scheletro solido  $\underline{u}$  ,
- la pressione dell'acqua  $p_w$  ,
- lo spostamento assoluto dell'acqua  $\underline{U}$  .

Per risolvere il problema è necessario conoscere le condizioni al contorno. Esse possono essere divise in due parti. Quelle relative alla equazione di conservazione della quantità di moto della fase solida sono:

- $t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i$  su  $\Gamma_t$  dove  $n_j$  rappresenta il versore normale alla porzione di bordo considerato;
- $u_i = \bar{u}_i$  su  $\Gamma_u$  ;
- $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  .

Quelle relative alla fase fluida sono:

- $p_w = \bar{p}_w$  su  $\Gamma_p$  ;
- $n^T W = \bar{W}_n$  su  $\Gamma_w$  dove  $\bar{W}_n$  rappresenta lo spostamento medio dell'acqua lungo la direzione  $n$  normale al bordo;
- $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_w$  .

Se il contorno è impermeabile all'acqua è necessario imporre un valore nullo a  $\bar{W}_n$  .

### A.2.3. La formulazione agli elementi finiti

La soluzione ai problemi governati dalle equazioni (A.2.16) (A.2.17) e (A.2.18) può essere ricavata tramite la soluzione di un problema di equazioni differenziali (PDE) scritto nella forma seguente:

$$A(\ddot{\Phi}) + B(\dot{\Phi}) + L(\Phi) = 0 \quad (\text{A.2.19})$$

dove A e B sono matrici composte da costanti mentre L è un operatore che è costituito da derivate spaziali. Il termine  $\Phi$  rappresenta il vettore delle variabili del problema (ad esempio  $u$ ,  $p$  e  $U$  che rappresentano rispettivamente gli spostamenti assoluti dello scheletro solido, la pressione interstiziale e gli spostamenti assoluti del fluido interstiziale).

La risoluzione agli elementi finiti prevede alcuni passi:

- sostituzione della funzione incognita  $\Phi$  con una serie di funzioni di forma  $N_k$  e di parametri  $\bar{\Phi}_k$  ;
- scrittura del problema in forma variazionale:

$$\int_{\Omega} W_j^T (A(\ddot{\Phi}^h) + B(\dot{\Phi}^h) + L(\Phi^h)) d\Omega = 0 \quad (\text{A.2.20})$$

dove  $W_j^T$  sono funzioni peso e possono essere considerate in genere identiche alle funzioni di forma;

- Lo spostamento dello scheletro solido, la pressione interstiziale e lo spostamento della fase fluida possono essere approssimati usando le funzioni di forma e i valori nodali con le relazioni:

$$u_i = \sum N_k^u \bar{u}_{ki} \quad , \quad p_w = \sum N_k^p \bar{p}_k \quad \text{e} \quad U_i = \sum N_k^U \bar{U}_{ki} \quad (\text{A.2.21})$$

dove  $N_k^u$  ,  $N_k^p$  e  $N_k^U$  sono funzioni di forma rispettivamente degli spostamenti dello scheletro solido, delle pressioni interstiziali e degli spostamenti della fase fluida.  $\bar{u}_{ki}$  ,  $\bar{p}_k$  e  $\bar{U}_{ki}$  sono rispettivamente gli spostamenti nodali dello scheletro solido, le pressioni interstiziali nodali e gli spostamenti nodali del fluido interstiziale. Ogni nodo nella formulazione  $u - p - U$  ha 7 gradi di libertà.



La prima equazione diventa

$$\int_{\Omega} d\mathbf{u} \cdot \left[ \frac{\partial \sigma'_i}{\partial x_i} - (1-n) \frac{\partial p_w}{\partial x_i} + (1-n) \rho_s \underline{b} - (1-n) \rho_s \ddot{\mathbf{u}} + n \underline{R} \right] d\Omega = 0 \quad (\text{A.2.22})$$

$$\int_{\Omega} N^{uT} \cdot \left[ \frac{\partial \sigma'_i}{\partial x_i} \right] d\Omega = \dots = (\mathbf{f}_1^u) - \mathbf{K}^{EP} \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{A.2.23})$$

$$A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot \left[ -(1-n) \frac{\partial p_w}{\partial x_i} \right] d\Omega = \dots = -\mathbf{f}_4^u + \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{p}}_w \quad (\text{A.2.24})$$

$$A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [(1-n) \rho_s \underline{b}] d\Omega = \mathbf{f}_5^u \quad (\text{A.2.25})$$

$$A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [-(1-n) \rho_s \ddot{\mathbf{u}}] d\Omega = \dots = \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{A.2.26})$$

$\mathbf{M}_s$  rappresenta la matrice di massa della parte solida.

Sostituendo l'equazione di d'Arcy nell'ultimo termine si ottiene :

$$A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \underline{R} d\Omega = \dots = \mathbf{C}_2 \dot{\bar{\mathbf{U}}} - \mathbf{C}_1 \dot{\bar{\mathbf{u}}} \quad (\text{A.2.27})$$

L'equazione (A.2.22) diventa:

$$-\mathbf{f}_4^u + \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{p}}_w + (\mathbf{f}_1^u) - \mathbf{K}^{EP} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_5^u + \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_2 \dot{\bar{\mathbf{U}}} - \mathbf{C}_1 \dot{\bar{\mathbf{u}}} = 0 \quad (\text{A.2.28})$$

oppure

$$\mathbf{K}^{EP} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{p}}_w - \mathbf{C}_2 \dot{\bar{\mathbf{U}}} + \mathbf{C}_1 \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}}_s \quad (\text{A.2.29})$$

$$\bar{\mathbf{f}}_s = -\mathbf{f}_4^u + \mathbf{f}_1^u + \mathbf{f}_5^u \quad (\text{A.2.30})$$

dove

$$\mathbf{f}_1^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{t,el}} N^{uT} (\bar{\mathbf{t}} + \underline{n} p_w) d\Gamma \quad (\text{A.2.31})$$

$$\mathbf{f}_4^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{p,el}} N^{uT} (1-n) \underline{n} p_w d\Gamma \quad (\text{A.2.32})$$

$$\mathbf{f}_s^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [(1-n) \rho_s \underline{b}] d\Omega \quad (\text{A.2.33})$$

$$\mathbf{K}^{EP} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{uT}}{\partial x_j} \underline{\underline{D}} \frac{\partial N^u}{\partial x_l} d\Omega \quad (\text{A.2.34})$$

$$\mathbf{G}_1 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{uT}}{\partial x_i} (1-n) N^p d\Omega \quad (\text{A.2.35})$$

$$\mathbf{C}_2 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} n^2 \underline{\underline{k}}_w N^U d\Omega \quad (\text{A.2.36})$$

$$\mathbf{C}_1 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} n^2 \underline{\underline{k}}_w^{-1} N^u d\Omega \quad (\text{A.2.37})$$

$$\mathbf{M}_s = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} (1-n) \rho_s N^u d\Omega \quad (\text{A.2.38})$$

Sostituendo la legge di d'Arcy nella seconda equazione essa diventa:

$$\int_{\Omega} d\mathbf{U} \cdot \left[ -n \frac{\partial p_w}{\partial x_i} - n^2 \underline{\underline{k}}^{-1} (\dot{\underline{U}} - \dot{\underline{u}}) - \rho_w n \ddot{\underline{U}} + \rho_w n \underline{b} \right] d\Omega = 0 \quad (\text{A.2.39})$$

$$-\int_{\Omega} n N^{UT} \frac{\partial p_w}{\partial x_i} d\Omega = \dots = -\mathbf{f}_1 + \mathbf{G}_2 \overline{p_w} \quad (\text{A.2.40})$$

$$\int_{\Omega} N^{UT} \rho_w n \underline{b} d\Omega = \mathbf{f}_2 \quad (\text{A.2.41})$$

$$\int_{\Omega} -N^{UT} \rho_w n \ddot{\underline{U}} d\Omega = \dots = -\mathbf{M}_w \ddot{\underline{U}} \quad (\text{A.2.42})$$

$$\int_{\Omega} -N^{UT} n^2 \underline{\underline{k}}_w^{-1} (\dot{\underline{U}} - \dot{\underline{u}}) d\Omega = \dots = \mathbf{C}_3 \dot{\underline{U}} + \mathbf{C}_2^T \dot{\underline{u}} \quad (\text{A.2.43})$$

$$\mathbf{f}_1 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{p,el}} n N^{UT} \underline{p}_w d\Gamma \quad (\text{A.2.44})$$

$$\mathbf{G}_2 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} n \frac{\partial N^{UT}}{\partial x_i} N^p d\Omega \quad (\text{A.2.45})$$

$$\mathbf{f}_2 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{UT} \rho_w n \underline{b} d\Omega \quad (\text{A.2.46})$$

$$\mathbf{M}_w = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{UT} \rho_w n \mathbf{N}^U d\Omega \quad (\text{A.2.47})$$

$$\mathbf{C}_3 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{UT} n^2 \underline{k}_w^{-1} \mathbf{N}^U d\Omega \quad (\text{A.2.48})$$

$$\mathbf{C}_2^T = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{UT} n^2 \underline{k}_w^{-1} \mathbf{N}^u d\Omega \quad (\text{A.2.49})$$

L'equazione (A.2.39) diventa:

$$-\mathbf{f}_1 + \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{p}}_w + \mathbf{f}_2 - \mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{C}_3 \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_2^T \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2.50})$$

oppure

$$-\mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{p}}_w + \mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_3 \dot{\mathbf{U}} - \mathbf{C}_2^T \dot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}}_w \quad (\text{A.2.51})$$

$$\bar{\mathbf{f}}_w = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1 \quad (\text{A.2.52})$$

L'equazione (A.2.18) espressa nella forma variazionale diventa:

$$\int_{\Omega} d\mathbf{p}_w \cdot \left[ n \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + (1-n) \epsilon_{ii} + \frac{p_w}{Q} \right] d\Omega = 0 \quad (\text{A.2.53})$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^{pT} n \frac{\partial U_i}{\partial x_i} d\Omega = \dots = -\mathbf{G}_2^T \bar{\mathbf{U}} \quad (\text{A.2.54})$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^{pT} (1-n) \epsilon_{ii} d\Omega = \dots = \mathbf{G}_1^T \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{A.2.55})$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^{pT} \frac{p_w}{Q} d\Omega = \dots = \mathbf{P} \bar{p} \quad (\text{A.2.56})$$

$$\mathbf{G}_2^T = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{pT} n \frac{\partial \mathbf{N}^U}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{A.2.57})$$

$$\mathbf{G}_1^T = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{pT} (1-n) \frac{\partial \mathbf{N}^u}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{A.2.58})$$

$$\mathbf{P} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{pT} \frac{1}{Q} N^p d\Omega \quad (\text{A.2.59})$$

L'equazione (A.2.53) diventa:

$$\mathbf{G}_2^T \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{G}_1^T \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{P} \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2.60})$$

#### A.2.4. Le equazioni in forma matriciale

Le equazioni (A.2.16) (A.2.17) e (A.2.18) possono essere riassunte in una espressione matriciale scritta nella forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (\text{A.2.61})$$

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{p}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{U}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -C_2^T & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{U}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^{EP} & -G_1 & 0 \\ -G_1^T & -P & -G_2^T \\ 0 & -G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_s \\ 0 \\ \bar{\mathbf{f}}_w \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.62})$$

$$\bar{\mathbf{f}}_s = -f_4^u + f_1^u + f_5^u \quad (\text{A.2.63})$$

$$\bar{\mathbf{f}}_w = f_2 - f_1 \quad (\text{A.2.64})$$

$$\mathbf{f}_1^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{i,el}} N^{uT} (\bar{\mathbf{t}} + \underline{\mathbf{n}} p_w) d\Gamma \quad (\text{A.2.65})$$

$$\mathbf{f}_4^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{p,el}} N^{uT} (1-n) \underline{\mathbf{n}} p_w d\Gamma \quad (\text{A.2.66})$$

$$\mathbf{f}_5^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [(1-n) \rho_s \underline{\mathbf{b}}] d\Omega \quad (\text{A.2.67})$$

$$\mathbf{K}^{EP} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{uT}}{\partial x_j} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \frac{\partial N^u}{\partial x_l} d\Omega \quad (\text{A.2.68})$$

$$\mathbf{G}_1 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{uT}}{\partial x_i} (1-n) N^p d\Omega \quad (\text{A.2.69})$$

$$\mathbf{C}_2 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{uT} n^2 \underline{k}_w^{-1} \mathbf{N}^U d\Omega \quad (\text{A.2.70})$$

$$\mathbf{C}_1 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{uT} n^2 \underline{k}_w^{-1} \mathbf{N}^u d\Omega \quad (\text{A.2.71})$$

$$\mathbf{M}_s = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{uT} (1-n) \rho_s \mathbf{N}^u d\Omega \quad (\text{A.2.72})$$

$$\mathbf{f}_1 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{p,el}} n \mathbf{N}^{UT} \underline{n} p_w d\Gamma \quad (\text{A.2.73})$$

$$\mathbf{G}_2 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} n \frac{\partial \mathbf{N}^{UT}}{\partial x_i} \mathbf{N}^p d\Omega \quad (\text{A.2.74})$$

$$\mathbf{f}_2 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{UT} \rho_w n \underline{b} d\Omega \quad (\text{A.2.75})$$

$$\mathbf{M}_w = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{UT} \rho_w n \mathbf{N}^U d\Omega \quad (\text{A.2.76})$$

$$\mathbf{C}_3 = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{UT} n^2 \underline{k}_w^{-1} \mathbf{N}^U d\Omega \quad (\text{A.2.77})$$

$$\mathbf{C}_2^T = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{UT} n^2 \underline{k}_w^{-1} \mathbf{N}^u d\Omega \quad (\text{A.2.78})$$

$$\mathbf{G}_2^T = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{pT} n \frac{\partial \mathbf{N}^U}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{A.2.79})$$

$$\mathbf{G}_1^T = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{pT} (1-n) \frac{\partial \mathbf{N}^u}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{A.2.80})$$

$$\mathbf{P} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{pT} \frac{1}{Q} \mathbf{N}^p d\Omega \quad (\text{A.2.81})$$

### A.3. FORMULAZIONE DEI PROCESSI MSP

#### A.3.1. Equazioni generali

Il sistema di equazioni differenziali che controlla nello spazio e nel tempo l'evoluzione dello scheletro solido e del fluido interstiziale è descritto da:

$$\frac{n}{K_w} \dot{p}_w + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad - \text{conservazione della massa della miscela;}$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho(\underline{b} - \underline{a}^s) = 0 \quad - \text{conservazione della quantità di moto della miscela;}$$

$$\underline{w}^w = -k_w [\text{grad}(p_w) - \rho_w \underline{b}] \quad - \text{legge di d'Arcy generalizzata;}$$

$$\underline{\dot{\sigma}}' = D(\underline{\sigma}', q, \underline{\eta}) \underline{\dot{\epsilon}} \quad - \text{legame costitutivo;}$$

$$\dot{q} = H(\underline{\sigma}', q, \underline{\dot{\epsilon}}, \underline{\eta}) \quad - \text{legge di incrudimento;}$$

$$\epsilon_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right) \quad - \text{tensore incremento di deformazioni dello scheletro solido (regime di piccoli spostamenti).}$$

E' possibile scrivere la velocità relativa media dell'acqua rispetto allo scheletro solido come derivata dello spostamento relativo medio ( $W$ ) e la velocità dello scheletro solido come la derivata dello spostamento ( $u$ )

$$\dot{W} = \underline{w}^w \quad (\text{A.3.1})$$

$$\dot{u} = \underline{v}^s \quad (\text{A.3.2})$$

Sostituendo l'equazione di d'Arcy nella equazione di conservazione della massa della miscela è possibile scrivere:

$$\frac{\partial -k_w [\text{grad}(p_w) - \rho_w \underline{b}]}{\partial x_i} + \epsilon_{ii} + \frac{\dot{p}_w}{Q} = 0 \quad - \text{conservazione della massa della miscela;}$$

poiché  $\frac{1}{Q} = \frac{n}{K_w} + \frac{\alpha - n}{K_s} \approx \frac{n}{K_w} + \frac{1 - n}{K_s}$  e se  $K_s \rightarrow \infty$  allora  $\frac{1}{Q} \approx \frac{n}{K_w}$ , inoltre  $\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} = \epsilon_{ii}$ .

Le equazioni sono state semplificate e sono riassunte:

$$\frac{\partial -k_w [\text{grad}(p_w) - \rho_w \underline{b}]}{\partial x_i} + \epsilon_{ii} + \frac{\dot{p}_w}{Q} = 0 \quad - \text{conservazione della massa della miscela} \quad (\text{A.3.3})$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho(\underline{b} - \underline{\ddot{u}}) = 0 \quad - \text{conservazione della q.tà di moto della fase solida;} \quad (\text{A.3.4})$$

Le equazioni (A.3.3 e A.3.4) sono scritte presentano una forma molto conveniente poiché presentano il termine  $\underline{p}_w$  solamente nella (A.3.3) ed il termine  $\underline{u}$  solamente nella (A.3.4) cosicché è possibile ottenere una scrittura delle matrici in forma diagonale.

Le incognite del problema sono:

- lo spostamento assoluto dello scheletro solido  $\underline{u}$  ,
- la pressione dell'acqua  $p_w$  ,

Per risolvere il problema è necessario conoscere le condizioni al contorno, che possono essere divise in due parti. Quelle relative alla equazione di conservazione della quantità di moto della fase solida sono:

- $t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i$  su  $\Gamma_t$  dove  $n_j$  rappresenta il versore normale alla porzione di bordo considerato;
- $u_i = \bar{u}_i$  su  $\Gamma_u$  ;
- $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  .

Quelle relative alla fase fluida sono:

- $p_w = \bar{p}_w$  su  $\Gamma_p$  ;
- $n^T W = \bar{W}_n$  su  $\Gamma_w$  dove  $\bar{W}_n$  rappresenta lo spostamento medio dell'acqua lungo la direzione  $n$  normale al bordo;
- $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_w$  .

Se il contorno è impermeabile all'acqua è necessario imporre un valore nullo a  $\bar{W}_n$  .

### A.3.2. La formulazione agli elementi finiti

La soluzione ai problemi governati dalle equazioni (A.3.3) e (A.3.4) può essere ricavata tramite la soluzione di un problema di equazioni differenziali (PDE) scritto nella forma seguente:

$$A(\ddot{\Phi}) + B(\dot{\Phi}) + L(\Phi) = 0 \quad (A.3.5)$$

dove A e B sono matrici composte da costanti mentre L è un operatore che è costituito da derivate spaziali. Il termine  $\Phi$  rappresenta il vettore delle variabili del problema.

Lo spostamento dello scheletro solido, la pressione interstiziale e lo spostamento della fase fluida possono essere approssimati usando le funzioni di forma e i valori nodali con le relazioni:

$$u_i = \sum N_k^u \bar{u}_{ki} \quad e \quad p_w = \sum N_k^p \bar{p}_k \quad (A.3.6)$$

dove  $N_k^u$  e  $N_k^p$  sono funzioni di forma rispettivamente degli spostamenti dello scheletro solido e delle pressioni interstiziali.  $\bar{u}_{ki}$  e  $\bar{p}_k$  sono rispettivamente gli spostamenti nodali dello scheletro solido e delle pressioni interstiziali nodali. Ogni nodo nella formulazione u – p ha 4 gradi di libertà.

L'equazione (A.3.3) espressa nella forma variazionale diventa:

$$\int_{\Omega} \underline{dp}_w \cdot \left[ \frac{\partial - k_w [\text{grad}(p_w) - \rho_w \underline{b}]}{\partial x_i} + \epsilon_{ii} + \frac{\dot{p}_w}{Q} \right] d\Omega = 0 \quad (A.3.7)$$

$$\int_{\Omega} N^{pT} \frac{\partial - k_w [\text{grad}(p_w) - \rho_w \underline{b}]}{\partial x_i} d\Omega = \dots = \underline{f}_1^p + \underline{H} \bar{\underline{p}}_w - \underline{f}_2^p \quad (A.3.8)$$

$$\int_{\Omega} N^{pT} \epsilon_{ii} d\Omega = \dots = \underline{Q}^T \dot{\underline{u}} \quad (A.3.9)$$

$$\int_{\Omega} N^{pT} \frac{\dot{p}_w}{Q} d\Omega = \dots = \underline{S} \dot{\bar{\underline{p}}}_w \quad (A.3.10)$$

$$\underline{f}_1^p = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_w, el} N^{pT} \bar{W} d\Gamma \quad (A.3.11)$$



$$\mathbf{H} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{pT}}{\partial x_i} \underline{k}_w \frac{\partial N^p}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{A.3.12})$$

$$\mathbf{f}_2^p = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{pT}}{\partial x_i} \underline{k}_w \rho_w \underline{b} d\Omega \quad (\text{A.3.13})$$

L'equazione (A.3.7) diventa:

$$\mathbf{H} \overline{\mathbf{p}}_w + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{S} \dot{\overline{\mathbf{p}}}_w = \mathbf{f}^p \quad (\text{A.3.14})$$

$$\mathbf{f}^p = \mathbf{f}_2^p - \mathbf{f}_1^p \quad (\text{A.3.15})$$

Sostituendo il principio delle tensioni efficaci nell'equazione (A.3.4) ed esprimendola nella forma variazionale si ottiene:

$$\int_{\Omega} \underline{du} \cdot \left[ \frac{\partial \sigma'_i}{\partial x_i} - \frac{\partial p_w}{\partial x_i} + \rho(\underline{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \right] d\Omega = 0 \quad (\text{A.3.16})$$

$$\int_{\Omega} N^{uT} \cdot \left[ \frac{\partial \sigma'_i}{\partial x_i} \right] d\Omega = \dots = \mathbf{f}_1^u - \mathbf{K}^{EP} \overline{\mathbf{u}} \quad (\text{A.3.17})$$

$$A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot \left[ \frac{-\partial p_w}{\partial x_i} \right] d\Omega = \dots = \mathbf{Q} \overline{\mathbf{p}}_w \quad (\text{A.3.18})$$

$$A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [\rho \underline{b}] d\Omega = \mathbf{f}_2^u \quad (\text{A.3.19})$$

$$A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [-\rho \ddot{\mathbf{u}}] d\Omega = \dots = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{A.3.20})$$

$\mathbf{M}$  rappresenta la matrice di massa globale del terreno.

L'equazione (A.3.16) diventa:

$$\mathbf{K}^{EP} \overline{\mathbf{u}} - \mathbf{Q} \overline{\mathbf{p}}_w + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^u \quad (\text{A.3.21})$$

$$\mathbf{f}^u = \mathbf{f}_1^u + \mathbf{f}_2^u \quad (\text{A.3.22})$$

dove

$$\mathbf{f}_1^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{t,el}} N^{uT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (\text{A.3.23})$$

$$\mathbf{f}_2^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [\rho \mathbf{b}] d\Omega \quad (\text{A.3.24})$$

$$\mathbf{K}^{EP} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{uT}}{\partial x_j} \underline{\underline{D}} \frac{\partial N^u}{\partial x_l} d\Omega \quad (\text{A.3.25})$$

$$\mathbf{Q} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{uT}}{\partial x_i} N^p d\Omega \quad (\text{A.3.26})$$

$$\mathbf{M} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \rho N^u d\Omega \quad (\text{A.3.27})$$

### A.3.3. Le equazioni in forma matriciale

Le equazioni (A.3.7), e (A.3.16) possono essere riassunte in una espressione matriciale scritta nella forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (\text{A.3.28})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{p}}}_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}}_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{EP} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}^u \\ \bar{\mathbf{f}}^p \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.29})$$

$$\mathbf{f}^u = \mathbf{f}_1^u + \mathbf{f}_2^u \quad (\text{A.3.30})$$

$$\mathbf{f}^p = \mathbf{f}_2^p - \mathbf{f}_1^p \quad (\text{A.3.31})$$

$$\mathbf{f}_1^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{t,el}} N^{uT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (\text{A.3.32})$$

$$\mathbf{f}_2^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [\rho \mathbf{b}] d\Omega \quad (\text{A.3.33})$$

$$\mathbf{K}^{EP} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{uT}}{\partial x_j} \underline{\underline{D}} \frac{\partial N^u}{\partial x_l} d\Omega \quad (\text{A.3.34})$$

$$\mathbf{Q} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{uT}}{\partial x_i} N^p d\Omega \quad (\text{A.3.35})$$

$$\mathbf{M} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \rho N^u d\Omega \quad (\text{A.3.36})$$

$$\mathbf{f}_1^p = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_w, el} N^{pT} \overline{W} d\Gamma \quad (\text{A.3.37})$$

$$\mathbf{H} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{pT}}{\partial x_i} \underline{k}_w \frac{\partial N^p}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{A.3.38})$$

$$\mathbf{f}_2^p = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{pT}}{\partial x_i} \underline{k}_w \rho_w \underline{b} d\Omega \quad (\text{A.3.39})$$

## A.4. FORMULAZIONE DEI PROCESSI UP

### A.4.1. Equazioni generali

Il sistema di equazioni differenziali che controlla nello spazio e nel tempo l'evoluzione dello scheletro solido e del fluido interstiziale è descritto da:

$$\dot{p}_w = \frac{-K_w}{n} tr \dot{\epsilon} \quad - \text{conservazione della massa della miscela;}$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho (\underline{b} - \underline{a}^s) = 0 \quad - \text{conservazione della quantità di moto della miscela;}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \overline{D}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad - \text{legame costitutivo in tensioni totali;}$$

$$\overline{D}_{ijkl} = (D_{ijkl} + \delta_{ij} \frac{K_w}{n} \delta_{kl})$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right) \quad - \text{tensore incremento di deformazioni dello scheletro solido (regime di piccoli spostamenti).}$$

Il problema può essere affrontato assumendo lo spostamento  $u^s$  come incognita primaria.

In questo approccio l'equazione di conservazione della massa è completamente disaccoppiata da quella di conservazione della quantità di moto. Per questa ragione è possibile risolvere quest'ultima direttamente tenendo conto delle condizioni al contorno:

- $t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i$  su  $\Gamma_t$  dove  $n_j$  rappresenta il versore normale alla porzione di bordo considerato;
- $u_i = \bar{u}_i$  su  $\Gamma_u$  ;
- $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  .

E' possibile scrivere la velocità dello scheletro solido come la derivata dello spostamento ( $u$ )  $\dot{u} = v^s$

cosicchè l'equazione di conservazione della quantità di moto risulta:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho(\underline{b} - \ddot{\underline{u}}) = 0 \quad - \text{conservazione della q.tà di moto} \quad (\text{A.4.1})$$

#### A.4.2. La formulazione agli elementi finiti

La soluzione del problema governato dalle equazione (A.4.1) può essere ricavato tramite la soluzione di un problema di equazioni differenziali (PDE) scritto nella forma seguente:

$$A(\ddot{\Phi}) + B(\dot{\Phi}) + L(\Phi) = 0 \quad (\text{A.4.2})$$

dove A e B sono matrici composte da costanti mentre L è un operatore che è costituito da derivate spaziali. Il termine  $\Phi$  rappresenta il vettore delle variabili del problema.

Lo spostamento dello scheletro solido può essere approssimato usando le funzioni di forma e i valori nodali con la relazione:

$$u_i = \sum N_k^u \bar{u}_{ki} \quad (\text{A.4.3})$$

dove  $N_k^u$  e  $\bar{u}_{ki}$  sono rispettivamente le funzioni di forma e gli spostamenti nodali dello scheletro solido. Ogni nodo nella formulazione per processi non drenati (UP) ha 3 gradi di libertà.

Sostituendo il principio delle tensioni efficaci nell'equazione (A.4.1) ed esprimendola nella forma variazionale si ottiene:

$$\int_{\Omega} d\underline{u} \cdot \left[ \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \rho(\underline{b} - \ddot{\underline{u}}) \right] d\Omega = 0 \quad (\text{A.4.4})$$

$$\int_{\Omega} N^{uT} \cdot \left[ \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \right] d\Omega = \dots = \underline{f}_1^u - \underline{K}^{EP} \bar{\underline{u}} \quad (\text{A.4.5})$$

$$\underline{A}_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [\rho \underline{b}] d\Omega = \underline{f}_2^u \quad (\text{A.4.6})$$

$$A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [-\rho \ddot{\mathbf{u}}] d\Omega = \dots = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{A.4.7})$$

$\mathbf{M}$  rappresenta la matrice di massa globale del terreno.

L'equazione (A.4.4) diventa:

$$\mathbf{K}^{EP} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^u \quad (\text{A.4.8})$$

$$\mathbf{f}^u = \mathbf{f}_1^u + \mathbf{f}_2^u \quad (\text{A.4.9})$$

dove

$$\mathbf{f}_1^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{i,el}} N^{uT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (\text{A.4.10})$$

$$\mathbf{f}_2^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [\rho \mathbf{b}] d\Omega \quad (\text{A.4.11})$$

$$\mathbf{K}^{EP} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{uT}}{\partial x_j} \underline{\underline{D}} \frac{\partial N^u}{\partial x_l} d\Omega \quad (\text{A.4.12})$$

$$\mathbf{M} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \rho N^u d\Omega \quad (\text{A.4.13})$$

Rispetto alle altre formulazioni (HSP, MSP), l'approccio per processi non drenati presenta il notevole vantaggio di poter utilizzare formulazioni agli elementi finiti standard (mezzo monofase). L'unica differenza riguarda la formulazione del legame costitutivo.

### A.4.3. Le equazioni in forma matriciale

L'equazione (A.4.14) può essere riassunta nella espressione matriciale scritta nella forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (\text{A.4.15})$$

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{u}}] + [0][\dot{\mathbf{u}}] + [\mathbf{K}^{EP}][\bar{\mathbf{u}}] = [\bar{\mathbf{f}}^u] \quad (\text{A.4.16})$$

$$\mathbf{f}^u = \mathbf{f}_1^u + \mathbf{f}_2^u \quad (\text{A.4.17})$$

$$\mathbf{f}_1^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Gamma_{i,el}} N^{uT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (\text{A.4.18})$$

$$\mathbf{f}_2^u = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \cdot [\rho \underline{\mathbf{b}}] d\Omega \quad (\text{A.4.19})$$

$$\mathbf{K}^{EP} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial N^{uT}}{\partial x_j} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \frac{\partial N^u}{\partial x_l} d\Omega \quad (\text{A.4.20})$$

$$\mathbf{M} = A_{el=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{el}} N^{uT} \rho N^u d\Omega \quad (\text{A.4.21})$$





# **BIBLIOGRAFIA**

- ADRIANOPOULOS K.I., PAPADIMITRIOU A.G., BOUCKOVALAS G.D. (2010) – Explicit Integration of bounding surface model for the analysis of earthquake soil liquefaction – *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* 34, 1586-1614.
- ADRIANOPOULOS K.I., PAPADIMITRIOU A.G., BOUCKOVALAS G.D. (2010) – Bounding surface plasticity model for the seismic liquefaction analysis of gestructures – *Soil Dyn. Earth. Eng.* 30, 895-911.
- AHMAD I., EL NAGGAR M.H., KHAN A.N. (2007) – Artificial neural network application to estimate kinematic soil pile interaction response parameters – *Soil Dyn. Earth. Eng.* 27, 892-905
- AMOROSI A., BOLDINI D., SASSO M. (2008) – Modellazione numerica del comportamento dinamico di gallerie superficiali in terreni argillosi. Rapporto di ricerca
- AVERSA S., de SANCTIS L., MAIORANO R.M.S. (2009) – Approccio semplificato per la valutazione dei momenti di interazione cinematica nei pali di fondazione sotto azioni sismiche. Atti del Convegno Nazionale ANIDIS, Bologna.
- AVERSA S., MAIORANO R.M.S., MANDOLINI A. (2005) – La progettazione delle fondazioni su pali alla luce degli Eurocodici. Atti della Conferenza Geotecnica di Torino.
- ATKINSON J. (2006) – An introduction to the mechanics of Soils and Foundations. McGraw-Hill.
- BADONI D., MAKRI N. (1997) – Pile-to-pile interaction in the time domain -non-linear axial group response under harmonic loading. - *Geotechnique* 47, 2, 299-317.
- BARDET J.P., CHOUCAIR W. (1991) – A linearized integration technique for incremental constitutive equations – *Inter. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* 15, 1-19.
- BASILE F. (2010) – Pseudostatic analysis of pile groups under earthquake loading – From research to Design in European Practice, Bratislava, Slovak Republic, June 2-4, 2010.
- BEEN K., JEFFERIES M. G. (1985) - A state parameter for sands. - *Geotechnique*, 35(2) 99–112.
- BEEN K., JEFFERIES M.G., HACHEY J. (1991) – The critical state of sands. *Geotechnique* 41 (3) 365-381.
- BELYTSCHKO T., LIU W.K., MORAN B. (2000) – Nonlinear Finite Elements For Continua and Structures – Wiley.
- BELL R.W., HOULSBY G.T. BURD H. J. (1993) – Suitability of Three-Dimensional Finite Elements

- for Modelling Material Incompressibility using Exact Integration. Communications in numerical methods in Engineering 9, 313-329.
- BENTLEY K. J., EL NAGGAR M. H. (2000) – Numerical Analysis of kinematic response of single piles – Can. Geotech. J. 37, 1368-1382.
- BOLTON M.D. (1986) – The Strength and Dilatancy of Sands. Geotechnique 36 (1) 65-78.
- BOULANGER R.W. (2010) – Sand Plasticity model for nonlinear seismic deformation analysis – Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics , May 24-29, 2010. San Diego, California.
- BOULANGER R. W., KAMAI R., ZIOTOPOLOU K. (2011) – Numerical modeling of liquefaction effects – 4th IASPEI / IAEE International Symposium, August 23–26, 2011 · University of California Santa Barbara
- BURGHIGNOLI A. (1985) – Lezioni di Meccanica delle terre. E.S.A. Edizioni Scientifiche Associate
- CAI X.Y., GOULD P.L., DESAI C.S. (2000) - Nonlinear analysis of 3D seismic interaction of soil–pile–structure systems and application – Eng. Stru. 22, 191-199.
- CAIRO R., CONTE E., COSIMO V.A., DENTE G. (2009) – Analisi dell'interazione cinematica palo-terreno. Atti del Convegno Nazionale ANIDIS, Bologna.
- CAIRO R., DENTE G. (2007) – Un metodo per l'analisi dell'interazione cinematica palo-terreno nei depositi orizzontalmente stratificati. Atti del Convegno Nazionale ANIDIS, Pisa
- CAPUTO V. (2005) – Fondazioni. In “Aspetti geotecnici della progettazione in zona sismica” linee guida AGI.
- CARBONARI S., DEZI F., LEONI G. (2009) – Dynamic Response of Bridges with Soil-Pile-Structure Interaction. Atti del Convegno Nazionale ANIDIS, Bologna
- CARBONARI S., DEZI F., GARA F., LEONI G. (2009) – Soil-Pile-Structure Interaction in the Seismic Response of Coupled Wall-Frame Structures. Atti del Convegno Nazionale ANIDIS, Bologna.
- CENEDESE A. (2003) – Meccanica dei Fluidi. McGraw-Hill.
- CHAU K.T., SHEN C.Y., GUO X. (2009) – Nonlinear Seismic soil-pile-structure interactions: Shaking table and FEM analyses - Soil Dyn. Earth. Eng. 29, 300-310.

- CHENG Z., JEREMIC B. (2009) – Numerical modeling and simulation of pile in liquefiable soil - *Soil Dyn. Earth. Eng.* 29, 1405-1416.
- CHOPRA A.K. (1995) – *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering* – Prentice Hall International, Inc.
- COHEN M. e JENNINGS P.C. (1983) – Silent Boundary Methods for Transient Analysis – in “Computational Methods for Transient Analysis”, Belytschko T. and Hughes T.J.R. - Elsevier Science Publishers B.V.
- CUBRINOVSKI M., ISHIHARA K. (1998) – State concept and modified elastoplasticity for sand modelling – *Soils and Foundations* 38, 4, 213-225.
- CUBRINOVSKI M., ISHIHARA K. (1998) – Modelling of Sand behaviour based on state concept - *Soils and Foundations* 38, 3, 115-127.
- DAFALIAS Y.F., MANZARI M.T. (2004) – Simple Plasticity Sand Model Accounting for Fabric Change Effects – *Journ. Eng. Mech.* 130, 6.
- DESAI C.S., SIRIWARDANE H.J. (1984) – *Constitutive Laws For Engineering Materials With emphasis on Geologic Materials*. Prentice – Hall
- DEZI F., CARBONARI S., LEONI G. (2009) – Static Equivalent Method for the Kinematic Interaction Analysis of Pile Foundations - *Atti del Convegno Nazionale ANIDIS*, Bologna.
- DEZI F., CARBONARI S., LEONI G. (2009) – A model for 3D kinematic interaction analysis of pile groups in layered soils. *Earthquake Engineering and Structural Dynamic* 38 1281-1305.
- DEZI F., CARBONARI S., DALL'ASTA A., LEONI G. (2007) – Dynamic spatial response of structures considering soil-foundation-structure interaction: analytical model. *Atti del Convegno Nazionale ANIDIS*, Pisa.
- DEZI F., CARBONARI S., DALL'ASTA A., LEONI G. (2007) – Dynamic spatial response of structures considering soil-foundation-structure interaction: application to a railway bridge. *Atti del Convegno Nazionale ANIDIS*, Pisa.
- DEZI F., CARBONARI S., LEONI G. (2009) – Kinematic Interaction in Pile Foundations. *Atti del Convegno Nazionale ANIDIS*, Bologna.
- DEZI F., CARBONARI S., LEONI G. (2010) – Kinematic bending moments in pile foundations - *Soil*

- Dyn. Earth. Eng. 30, 119-132.
- DIHORU L., BHATTACHARYA S., TAYLOR C.A., WOOD D.M., MOCCIA F., SIMONELLI A.L., MYLONAKIS G. (2009) – Experimental modelling of kinematic bending moments of piles in layered soils - Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering – Kokusho, Tsukamoto & Yoshimine (eds).
- DI LAORA R. (2009) – Seismic soil-structure interaction for pile supported systems – Tesi di Dottorato.
- DI LAORA R., MANDOLINI A. (2009) – Modifica del segnale sismico alla base di una struttura dovuta alla presenza dei pali. Atti del Convegno Nazionale ANIDIS, Bologna.
- DI LAORA R., MANDOLINI A. (2009) – Some remarks on the kinematic vs. inertial interaction for piled foundations. Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering – Kokusho, Tsukamoto & Yoshimine (eds).
- DI LAORA R., MANDOLINI A. (2011) – Momento cinematico alla testa di un palo in terreno a rigidità variabile con la profondità. - Atti del Convegno Nazionale ANIDIS, Bari.
- DOBRY R., O'ROURKE M.J. (1983) - Discussion on 'Seismic response of end-bearing piles - by Flores-Berrones R., Whitman R.V. ". J. Geotech. Engng Div., ASCE, 109, pp. 778-781, 1983.
- DOBRY R., GAZETAS G. (1988) – Simple method for dynamic Stiffness and damping of floating pile groups – Geotechnique 38, 4, 557-574.
- ELGAMAL A., YAN L., YANG Z., CONTE J.P. (2008) – Three-Dimensional Seismic Response of Humboldt Bay Bridge-Foundation-Ground System – J. Struct. Eng. 134, 7.
- EL NAGGAR M. H., NOVAK M. (1996) – Nonlinear analysis for dynamic lateral pile response – Soil Dyn. Earth. Eng. 15, 233-244.
- FACCIOLI E., PAOLUCCI R. (2005) – Elementi di Sismologia applicata all'ingegneria – Pitagora Editrice Bologna
- GAZETAS G., DOBRY R. (1984) – Horizontal Response of Piles in Layered Soils – J. of Geotech. Eng. Vol. 110, No. 1, pp. 20-40.
- GAZETAS, G., (1991) - Foundation Vibrations - Foundation Engineering Handbook, 2nd Edition, H.Y. Fang, Ed., Van Nostrand Reinholds, Chapter 15, pp.553-593.

- HUGHES T.J.R. (1983) – Analysis of Transient Algorithms with Particular Reference to Stability Behavior – in “Computational Methods for Transient Analysis”, Belytschko T. and Hughes T.J.R. - Elsevier Science Publishers B.V.
- HUGHES T. J. R. (1984) - Numerical implementation of constitutive models: rate-independent deviatoric plasticity. - In: Nemat-Nasser, S., Asaro, R., Hegemier, G. (Eds.), Theoretical Foundations for Large Scale computations of Non Linear Material Behavior. Martinus Nijhoff Publisher, Dordrecht, Horton, Greece.
- HUGHES T.J.R. (1987) – The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis – Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- ISHIBASHI I., ZHANG X. (1993) – Unified Dynamic Shear Moduli and Damping Ratios of Sand and Clay. *Soils and Foundations* 33 (1) 182-191.
- ISHIHARA K., TATSUOKA F., YASUDA S. (1975) – Undrained deformation and Liquefaction of Sand under Cyclic Stresses. *Soils and Foundations* 15 (1) 29-44.
- ISHIHARA K. (1993) – Liquefaction and Flow failure during earthquakes. - *Geotechnique* 43 (3) 351-415.
- ISHIHARA K. (1996) – Soil behaviour on Earthquake Geotechnics. - Oxford Engineering Science Series
- JARESEK M., BAZANT, Z. P. (2002) - Inelastic Analysis of Structure. - Wiley, Chichester.
- JEFFERIES M, BEEN K. (2006) - Soil liquefaction – A critical state approach – Taylor & Francis.
- JEREMIC B., KUNNATH S., XIONG F. (2004) – Influence of Soil-foundation-structure interaction on seismic response of the I-880 viaduct – *Eng. Struct.* 26, 391-402.
- JEREMIC B., CHENG Z., TAIEBAT M., DAFALIAS Y. F. (2008) - Numerical simulation of fully saturated porous materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32(13):1635–1660, 2008.
- JEREMIC B., GUANZHOU J. (2008) – Parallel Finite Element Computations for Soil-Foundation-Structure Interaction Problems – Report UCD-CompGeoMech-02-07.
- JEREMIC B. JIE G. (2008) – Parallel Finite Element Computations for Soil-Foundation-Structure Interaction Problems. Report UCD-CompGeoMech-02-07.

- JEREMIC B., JIE G., PREISING M., TAFAZZOLI N. (2009) – Time domain simulation of soil-foundation-structure interaction in non-uniform soils. *Earthquake Engineering and Structural Dynamic* 38, 699-718.
- JEREMIC B. (2009) - Lecture Notes on Computational Geomechanics: Inelastic Finite Elements for Pressure Sensitive Materials . Department of Civil and Environmental Engineering University of California, Davis .
- JOINER W., CHEN A.T.F. (1975) – Calculation of Nonlinear Ground Response in Earthquakes – *Bull.Seism.S.America*, vol.65, No. 5, pp. 1315-1336.
- KRAMER S.L. (1996) – *Geotechnical Earthquake Engineering*. Prentice - Hall
- KAUSEL E., ROESSET J.M. (1981) – Stiffness Matrices for Layered Soils. - *Bull. Of Seism. Soc. of America* 71 (6) 1743-1761.
- KAVVADAS M., GAZETAS G. (1993) – Kinematic seismic response and bending of free-head piles in layered soil – *Geotechnique* 43, 2, 207-222.
- LI X.S., DAFALIAS Y.F. (2000) – Dilatancy for cohesionless soils – *Geotechnique* 50, 4, 449-460.
- LANCELLOTTA R. (2004) – *Geotecnica*. Zanichelli.
- LANCELLOTTA R., CALAVERA J. (1999) – *Forndazioni*. McGraw-Hill.
- LANZO G., SILVESTRI F. (1999) – *Risposta Sismica Locale*. Hevelius.
- LI X.S., DAFALIAS Y.F. (2000) – Dilatancy for cohesionless soils – *Geotechnique*, 50(4) 449-460
- LEWIS R.W., SCHREFLER B.A. (1998) – *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porus Media*. Wiley, Chichester.
- LUBLINER J. (2008) - *Plasticity Theory* - Dover
- LUONGO A., PAOLONE A. (2005) – *Scienza delle Costruzioni – vol.1 Il continuo di Cauchy*. Casa Editrice Ambrosiana.
- LYSMER J. e KUHLEMEYER A.M. (1969) – Finite Dynamic Model for Infinite Media – *Journal of the Engineering Mechanics Division – Proc. Of the American Society of Civil Engineers*.
- MAKRIS N. GAZETAS G. (1993) – Displacement phase differences in harmonically oscillating pile – *Geotechnique* 43, 1, 135-150.

- MAKRIS N., GAZETAS G., DELIS E. (1996) – Dynamic soil-pile-structure interaction: records and predictions. - *Geotechnique* 46, 1, 33-50.
- MAHESHWARI B.K., TRUMAN K.Z., EL NAGGAR M.H., GOULD P.L. (2004) – Three-dimensional finite element nonlinear dynamic analysis of pile groups for lateral transient and seismic excitations. - *Can. Geotech. J.* 41, 118-133.
- MAHESHWARI B.K., TRUMAN K.Z., EL NAGGAR M.H., GOULD P.L. (2004) – Three-dimensional nonlinear analysis for seismic soil-pile-structure interaction – *Soil Dyn. Earth. Eng.* 24, 343-356.
- MAHESHWARI B.K., TRUMAN K.Z., EL NAGGAR M.H., GOULD P.L. (2005) – Three-dimensional nonlinear seismic analysis of single pile using finite element model: Effect of plasticity of soil. - *Int. J. Geomech.* 5,1,35-44.
- MAIORANO R.M.S., AVERSA S., (2006) – Importanza relativa di interazione cinematica ed inerziale nell'analisi dei pali di fondazione sotto le azioni sismiche. *Atti dei V Convegno Nazionale dei Ricercatori di Geotecnica, Bari.*
- MAIORANO R.M.S., de SANCTIS L., AVERSA S., MANDOLINI A. (2008) – Kinematic response analysis of piled foundations under seismic excitation. *Can. Geotech. J.* 46 571- 584.
- MANDOLINI A., VIGGIANI C. (2005) – Pile Foundations: experimental investigations, analysis and design. *Relazione generale, convegno Osaka.*
- MANZARI M.T., DAFALIAS Y.F. (1997) – A critical state two-surface plasticity model for sands. *Geotechnique* 47 (2) 255-272.
- MAO X., FAHEY M. (2003) – Behaviour of calcareous soils in undrained cyclic simple shear – *Geotechnique* 53, 8, 715-727.
- MEMON B-A., SU X-z. (2004) – Arc Length technique for nonlinear finite element analysis – *Journal of Zhejiang University* , 5(5) , 618-628.
- MIRIANO (2011) - Modellazione numerica della risposta sismica di strutture di sostegno flessibili – *Tesi di Dottorato.*
- MOCCIA F., SICA S., SINOMELLI A.L. (2009) – Interazione cinematica nei pali di fondazione: confronto tra diverse metodologie di analisi. *Atti del Convegno Nazionale ANIDIS, Bologna.*



- MYLONAKIS G. (1995) – Contributions to Static and Seismic Analysis of Piles and Pile-Supported Bridge Piers – Ph.D. Thesis
- MYLONAKIS G., NIKOLAOU A., GAZETAS G. (1997) – Soil-pile-bridge seismic interaction: Kinematic and Inertial Effects. Part I: Soft Soil. - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, 26, 337-359.
- MYLONAKIS G., GAZETAS G. (2000) – Seismic Soil-Structure Interaction: Beneficial or Detrimental?. *Journal of Earthquake Engineering* 4 (3) 277-301.
- MYLONAKIS G. (2001) – Simplified Model for Seismic Pile Bending at Soil Layer Interfaces. *Soils and Foundations* 41 (4) 47-58.
- MYLONAKIS G., NIKOLAOU S., GAZETAS G. (2006) – Footings under seismic loading: Analysis and design issues with emphasis on bridge foundations - *Soil. Dyn. Earth. Eng.* 26, 824-853.
- MYLONAKIS G., SYNGROS C., GAZETAS G., TAZOH T. (2006) – The role of soil in the collapse of 18 piers of Hanshin Expressway in Kobe earthquake. - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, 35, 547- 575.
- NIKOLAOU S., MYLONAKIS G., GAZETAS G., TAZOH T. (2001) – Kinematic pile bending during earthquakes: analysis and field measurements – *Geotechnique* 51, 5, 425-440.
- NOGAMI T., OTANI J., KONAGAI K., CHEN H.L. (1992) – Nonlinear Soil-pile Interaction Model for Dynamic lateral motion - *J.Geotech.Eng.*, Vol. 118, No. 1, pp. 89-106.
- NOVAK M. (1974) – Dynamic Stiffness and Damping of Piles – *Can.Geotech.J.*,11,574
- NOVAK M., SHARNOUBY B. (1984) – Evaluation of Dynamic Experiments on Pile Group – *J.Geotech.Eng.*, Vol. 110, No. 6, pp. 738-756.
- OTTOSEN N. S., RISTINMAA M. (2005) – *The mechanics of Constitutive Modelling*. Elsevier.
- TASIOPOULOU P. (2010) - *Verification & Validation of Fully-Coupled Modeling of Soil Liquefaction* – Master Thesis , UC Davis.
- PAPADIMITRIOU A.G., BOUCKOVALAS G.D., DAFALIAS Y.F. (2001) – Plasticity Model for Sand under Small and Large Cyclic Strains. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 127 (11) 973-983.
- PAPADIMITRIOU A.G., BOUCKOVALAS G.D. (2002) - Plasticity Model for Sand under Small and Large Cyclic Strains: a multiaxial formulation. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering* 22, 191-204.

- PERDHAN T.B.S., TATSUOKA F., SATO Y. (1989) – Experimental Stress-Dilatancy Relations of Sand Subjected to cyclic loading – Soils and Found. 29, 1, 45-64.
- PORCINO D., CARIDI G., GHIONNA V.N. (2008) – Undrained monotonic and cyclic simple shear behaviour of carbonate sand. - Geotechnique 58, 8, 635-644.
- POTTS D.M., GENS A. (1984) – The Effect of the Plastic Potential in Boundary Value Problems Involving Plane Strain Deformation. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 8, 259-286.
- POTTS D.M., MARTINS J.P. (1982) – The Shaft Resistance of Axially loaded Piles in Clay. Geotechnique 32 (4), 369-386.
- POTTS D., ZDRAVKOVIC L. (2001) – Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering. Theory. Thomas Telford.
- POTTS D., ZDRAVKOVIC L. (2001) – Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering. Application. Thomas Telford.
- PORCINO D., CARIDI G., GHIONNA V.N. (2008) – Undrained monotonic and cyclic simple shear behaviour of carbonate sand. Geotechnique 58 (8) 653-644.
- RATHJE E.M., ABRAHAMSON N.A., BRAY J.D. (1998) – Simplified Frequency Content Estimates of Earthquake Ground Motions. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering 124 (2) 150-159.
- RANDOLPH M.F.(1981) - The response of flexible piles to lateral loading - Géotechnique, Volume 31, Issue 2, 01 June 1981 , pag 247 –259 , ISSN: 0016-8505, E-ISSN: 1751-7656
- RANDOLPH M.F. (2003) – Science and empiricism in pile foundation design. Geotechnique 53 (10) 847-875.
- ROVTHIS E.N., PITILAKIS K.D., MYLONAKIS G.E. (2009) – Seismic analysis of coupled soil-pile-structure system leading to the definition of a pseudo-natural SSI frequency - Soil Dyn. Earth. Eng. 29, 1005-1015.
- SALGADO R. (2008) – The Engineering of Foundations. McGraw - Hill
- SANTUCCI de MAGISTRIS F. (2005) – Tecniche sperimentali in sito ed in laboratorio. In “Aspetti geotecnici della progettazione in zona sismica” linee guida AGI.

- SANTUCCI de MAGISTRIS F. (2005) – Fattori di influenza sul comportamento meccanico dei terreni. In “Aspetti geotecnici della progettazione in zona sismica” linee guida AGI.
- SELLARI E. (2007) – Modellazione Matematica e Numerica del Comportamento Dinamico dei Terreni Argillosi con Riferimento alla Risposta Sismica delle Dighe in Terra - Tesi di Dottorato.
- SEMBLAT J-F, LENTI L. e GANDOMZADEH A. (2010) – A Simple multi-directional absorbing layer method to simulate elastic wave propagation in unbounded domains – International Journal for Numerical Methods in Engineering
- SHARNOUBY B., NOVAK M. (1984) – Dynamic Experiments with Group of Piles – J.Geotech.Eng., Vol. 110, No. 6, pp. 719-737.
- SICA S., MYLONAKIS G., SIMONELLI A.L. (2007) – Kinematic bending of Piles: Analysis vs. Code Provisions. Atti del 4th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering, June 25-28/2007. Thessaloniki – Greece.
- SICA S., SIMONELLI A.L., MYLONAKIS G. (2009) – Kinematic pile bending in layered soils: Linear vs. equivalent-linear analysis. Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering – Kokusho, Tsukamoto & Yoshimine (eds).
- SICA S., MYLONAKIS G., SIMONELLI A.L. (2011) – Transient kinematic pile bending in two-layer soil - Soil Dyn. Earth. Eng. 31, 891-905.
- SIMO J.C., HUGHES T.J.R. (1997) – Computational Inelasticity - Springer
- SIMONELLI A.L., SICA S. (2007) – Interazione cinematica palo-terreno: analisi ed indicazioni di normativa. Atti del XII Convegno Nazionale dell'Ingegneria Sismica in Italia. ANIDIS, Pisa.
- SIMONELLI A.L. (2008) – Metodi innovativi per la progettazione di opere di sostegno e la valutazione della stabilità dei pendii. Rapporto scientifico su Fondazioni profonde.
- SLOAN S.W. (1987) – Substepping Schemes for the Numerical Integration of Elastoplastic Stress – Strain Relations. International Journal for Numerical Methods in Engineering 24, 893-911.
- TAMAGNINI C., PASTOR M. (2002) – Numerical Modelling in Geomechanics – Revue française de génie civil, vol. 6, n. 6 – Lavoisier.
- TAHGHIGHI H., HONAGAI H. (2007) – Numerical analysis of nonlinear soil-pile group interaction under lateral loads - Soil Dyn. Earth. Eng. 27, 463-474.

- TAIEBAT M., JEREMIC B., DAFALIAS Y.F., KAYNIA A.M., CHENG Z. (2010) – Propagation of seismic waves through liquefied soils - *Soil Dyn. Earth. Eng.* 30, 236-257.
- TAKEWAKI I., KISHIDA A. (2005) – Efficient analysis of pile-group effect on seismic stiffness and strength design of buildings - *Soil. Dyn. Earth. Eng.* 25, 355-367.
- TOKIMATSU K., SUZUKI H., MASAYOSHI S. (2005) – Effect of inertial and kinematic interaction on seismic behavior of pile with embedded foundation. - *Soil. Dyn. Earth. Eng.* 25, 753-762.
- TOKIMATSU K., SUZUKI H. (2009) – Seismic soil-pile-structure interaction based on large shaking table tests - *Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering* – Kokusho, Tsukamoto & Yoshimine (eds).
- VERDUGO R., ISHIHARA K. (1996) - The steady state of sandy soils - *Soils Found.*, 36(2) 81–92.
- VIGGIANI C. (2000) – *Fondazioni*. Hevelius
- VIGGIANI C. (2001) – Analisi e progetto delle fondazioni su pali. Prima conferenza “Arrigo Croce”- *Rivista Italiana di Geotecnica* 1.
- VILLAVERDE, R. (2009) – *Fundamental Concepts of Earthquake Engineering*. CRC Press, Taylor&Francis Group.
- WOLF J.P. (1991) – Consistent Lumped-Parameter Models of Unbounded Soil: Frequency-Independent Stiffness, Damping and Mass Matrices – *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol 20, 33-41
- WOOD D.M. (1990) – *Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*. Cambridge Univ. Press.
- WOOD D.M., BELKHEIR K., LIU D.F. (1994) - Strain softening and state parameter for sand modeling - *Geotechnique*, 44(2) 335–339.
- WOOD D.M. (2004) – *Geotechnical modelling*
- WU G. (2006) – Quasi-3D Dynamic Finite Element Analysis of Single piles and pile Groups – *VERSAT – P3D - Manual*
- YOSHIMURA C., BIELAK J., HISADA Y. e FERNANDEZ A. (2003) – Domain Reduction Method for Three-Dimensional Earthquake Modeling in Localized Regions, Part II: Verification and Applications – *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 93, n. 2, 825-840

YU HAI – SUI (2006) – Plasticity and Geotechnics. Springer

ZIENKIEWICZ O.C., CHANG C.T., PASTOR M., SCHREFLER B.A., SHIOMI T. (1999) – Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering. Wiley, Chichester.

ZIENKIEWICZ O.C., CHANG C.T., BETTES P. (1980) – Drained, undrained consolidating and Dynamic Behaviour assumption in soils. *Geotechnique* 40 (1), 385-395.

ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L. (2000) - Finite Element Method (5th Edition) Volume 1 - The Basis. Butterworth-Heinemann ed.